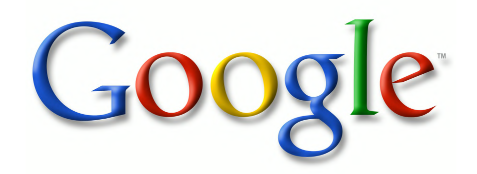


OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 156.

NEUE METHODE VORGELEGTER PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG ZWISCHEN IRGEND EINER ANZAHL VON VERÄNDERLICHEN

VON

C. G. J. JACOBI.

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

OSTWALDS KLASSIKER

DER

EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

8. Gebunden.

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Mathematik:

Nr. 1. **H. Helmholtz,** Erhalt. der Kraft. (1847.) 6. Taus. (60 S.) *M* —.80.

» 2. **C. F. Gauss,** Allgem. Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfern. wirk. Anziehungs- u. Abstoß.-Kräfte. (1840.) Herausg. v. A. Wangerin. 2. Aufl. (60 S.) *M* —.80.

» 5. —— Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. v. Wangerin. Dritte Auflage. (64 S.) *M* —.80.

» 10. **F. Neumann,** Die mathematischen Gesetze d. inducirten elektrischen Ströme. (1845.) Herausg. v. C. Neumann. (96 S.) *M* 1.50.

» 11. **Galileo Galilei,** Unterred. u. mathem. Demonstrat. über zwei neue Wissenszweige usw. (1638.) 1. Tag m. 13 u. 2. Tag m. 26 Fig. i. Text. Aus d. Ital. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. (142 S.) *M* 3.—.

» 14. **C. F. Gauss,** Die 4 Beweise der Zerleg. ganzer algebr. Funktionen usw. (1799—1849.) Hrsg. v. E. Netto. 2. Aufl. Mit 1 Taf. (81 S.) *M* 1.50.

» 17. **A. Bravais,** Abhandlungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. u. in Gemeinschaft mit P. Groth herausgeg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) *M* 1.—.

» 19. Über die Anzieh. homogener Ellipsoide, Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausgeg. von A. Wangerin. (118 S.) *M* 2.—.

» 24. **Galileo Galilei,** Unterred. u. math. Demonstrat. üb. 2 neue Wissenszweige usw. (1638.) 3. u. 4. Tag, m. 90 Fig. i. Text. Aus d. Ital. u. Lat. übers. u. hrsg. v. A. v. Oettingen. 2. Aufl. (141 S.) *M* 2.—.

» 25. —— Anh. z. 3. u. 4. Tag, 5. u. 6 Tag, mit 23 Fig. im Text. Aus d. Ital. u. Latein. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. (66 S.) *M* 1.20.

» 36. **F. Neumann,** Theorie inducirter elektr. Ströme. (1847.) Herausgeg. von C. Neumann. Mit 10 Fig. im Text. (96 S.) *M* 1.50.

» 46. Abhandlg. über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696); **Jac. Bernoulli** (1697) u. **Leonhard Euler** (1744). Herausg. v. P. Stäckel. Mit 19 Textfig. (144 S.) *M* 2.—.

» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgeg. von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) *M* 1.60.

» *53.* ***C. F. Gauss,*** Die Intensität der erdmagnet. Kraft auf absolutes Maß *zurückgeführt.* Herausgeg. von E. Dorn. (62 S.) *M* 1.—.

2.– (~~1.50~~)

Nr. 54. **J. H. Lambert**, Anmerk. und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. (1772.) Herausg. v. A. Wangerin. Mit 21 Textfiguren. (96 S.) M 1.60.

» 55. **Lagrange** und **Gauss**, Kartenprojection. (1779 u. 1822.) Herausg. von A. Wangerin. Mit 2 Textfiguren. (102 S.) M 1.60.

» 60. **Jacob Steiner**, Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten u. zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) M 1.20.

» 61. **G. Green**, Versuch, die math. Analysis auf die Theorien d. Elektric. u. des Magnetismus anzuwenden. (1828.) Herausgegeben von A. v. Oettingen und A. Wangerin. (140 S.) M 1.80.

» 64. **C. G. J. Jacobi**, Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abelschen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgeg. von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) M —.70.

» 65. **Georg Rosenhain**, Abhandl. über die Functionen zweier Variabler mit 4 Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgeg. von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) M 1.50.

» 67. **A. Göpel**, Entwurf einer Theorie der Abelschen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) M 1.—.

» 69. **James Clerk Maxwell**, Über Faradays Kraftlinien. (1855 u. 1856.) Herausgegeben von L. Boltzmann. (130 S.) M 2.—.

» 71. **N. H. Abel**, Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) M 1.—.

» 73. **Leonhard Euler**, Zwei Abhandlg. über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Latein. übersetzt u. herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Fig. im Text. (65 S.) M 1.—.

» 75. **Axel Gadolin**, Abhandlg. über die Herleitung aller krystallograph. Systeme mit ihren Unterabtheil. aus einem einzigen Prinzipe. (Gelesen den 19. März 1867.) Deutsch herausgeg. von P. Groth. Mit 26 Textfiguren und 3 Tafeln. (92 S.) M 1.50.

» 76. **F. E. Neumann**, Theorie der doppelt. Strahlenbrech., abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik. (1832.) Herausg. v. A. Wangerin. (52 S.) M —.80.

» 77. **C. G. J. Jacobi**, Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus determinantium.) (1841.) Herausgeg. von P. Stäckel. (73 S.) M 1.20.

» 78. —— Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgeg. von P. Stäckel. (72 S.) M 1.20.

» 79. **H. v. Helmholtz**, 2 hydrodynamische Abhandlungen. I. Über Wirbelbewegungen. (1858.) — II. Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. (1868.) Herausgeg. von A. Wangerin. (80 S.) M 1.20.

» 80. —— Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. (1859.) Herausgeg. von A. Wangerin. (132 S.) M 2.—.

Neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Anzahl von Veränderlichen

Von

C. G. J. Jacobi

Herausgegeben

von

G. Kowalewski

Leipzig
Verlag von Wilhelm Engelmann
1906

Neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Anzahl von Veränderlichen.

(Aus den nachgelassenen Manuskripten von *C. G. J. Jacobi* herausgegeben von *A. Clebsch.*)

Reduktion des allgemeinen Problems auf eine einfachere Form.*)

§ 1. V sei die gesuchte Funktion, $q_1, q_2, \ldots, q_m$ die unabhängigen Veränderlichen und $p_1, p_2, \ldots, p_m$ die partiellen Ableitungen von V nach $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Das Integrationsproblem der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Anzahl von Veränderlichen besteht dann in folgendem:

Gegeben ist eine Gleichung zwischen den Größen $V, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$. Man soll V als Funktion von $q_1, q_2, \ldots, q_m$ bestimmen.

Ich werde annehmen, daß die vorgelegte Gleichung die gesuchte Funktion V selbst nicht enthält. So oft nämlich das Gegenteil der Fall ist, läßt sich das Problem auf ein anderes zurückführen, wo die Zahl der unabhängigen Veränderlichen um eine Einheit vermehrt, die unbekannte Funktion aber aus der Differentialgleichung verschwunden ist. Man führe in der Tat die neue Veränderliche t ein, und es sei $W = tV$, dann wird**)

$$V = \frac{\partial W}{\partial t}, \quad p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{1}{t}\frac{\partial W}{\partial q_1}, \quad \ldots, \quad p_m = \frac{\partial V}{\partial q_m} = \frac{1}{t}\frac{\partial W}{\partial q_m}.$$

*) Paragraphenüberschriften sind in dem Manuskript außer bei §§ 66, 67 nicht zu finden. Im Interesse des Lesers hielt ich ihre Hinzufügung für erforderlich, um den Überblick über die etwas lange Abhandlung zu erleichtern. *Clebsch.*

**) Zur Bezeichnung partieller Differentiale werde ich das besondere Zeichen ∂, zur Bezeichnung totaler das Zeichen d anwenden. Das ist festzuhalten.

Setzt man diese Werte in die vorgelegte Gleichung zwischen V und den Größen $q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m$ ein, so entsteht eine Gleichung zwischen den unabhängigen Veränderlichen t, $q_1, \ldots, q_m$ und den partiellen Ableitungen von W nach jenen Veränderlichen, eine Gleichung, die die Funktion W selbst nicht enthält. Da wir nun die Anzahl m der unabhängigen Veränderlichen beliebig angenommen haben, so ist die Annahme erlaubt, daß die vorgelegte Differentialgleichung die unbekannte Funktion nicht enthält.[1])

Darlegung des Problems in der Form, die es im folgenden haben soll.

§ 2. Wenn die unbekannte Funktion in die vorgelegte partielle Differentialgleichung nicht eingeht, so läßt sich das Problem in vollster Allgemeinheit so aussprechen:[2])

Vorgelegt ist der Ausdruck

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m .$$

Man soll, wenn eine Gleichung zwischen den Größen $q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m$ gegeben ist, $m - 1$ andere Gleichungen zwischen denselben Größen finden derart, daß die aus ihnen als Funktionen von $q_1, \ldots, q_m$ berechneten Größen $p_1, \ldots, p_m$ den vorgelegten Ausdruck $p_1 dq_1 + \cdots + p_m dq_m$ zu einem vollständigen Differential dV machen.

Damit der Ausdruck $p_1 dq_1 + \cdots + p_m dq_m$ ein vollständiges Differential sei, muß $\frac{m(m-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen genügt werden, die in folgendem Schema enthalten sind:

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right).$$

In dieser Gleichung darf man den Indizes i und k die Werte $1, 2, \ldots, m$ beilegen oder, um nur voneinander verschiedene Gleichungen zu bekommen, dem Index i die Werte $1, 2, \ldots, m - 1$ und für die einzelnen Werte von i dem k nur die Werte größer als i.

In den obigen Gleichungen werden die Größen $p_1, \ldots, p_m$ als Funktionen von $q_1, \ldots, q_m$ betrachtet. So oft dies geschieht, will ich die partiellen Ableitungen jener Größen in Klammern einschließen, so wie es oben gemacht ist.

Erste Form der Integrabilitätsbedingungen.

§ 3. Was ich zuerst vornehmen will, ist eine Umformung der Bedingungsgleichungen. Ich werde nämlich angeben, wie sie sich gestalten, wenn man nicht wie vorher $p_1, \dots, p_m$ als Funktionen von $q_1, \dots, q_m$ betrachtet, sondern

p_1 als Funktion von $p_2, p_3, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$,
p_2 » » » $p_3, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$,
. . . .
p_{m-1} » » » $p_m, q_1, \dots, q_m$,
p_m » » » $q_1, \dots, q_m$.

Auf diese Annahme werden sich im folgenden alle partiellen Differentiationen stützen, wenn nichts anderes ausdrücklich festgesetzt wird, oder die Ableitungen eingeklammert auftreten, wodurch immer angedeutet ist, daß man $p_1, \dots, p_m$ sämtlich als Funktionen von $q_1, \dots, q_m$ ansieht.

Das erste System von Bedingungsgleichungen (es entspricht dem Werte $i = 1$) ist das folgende:

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial q_2}\right) = \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right), \quad \left(\frac{\partial p_1}{\partial q_3}\right) = \left(\frac{\partial p_3}{\partial q_1}\right), \quad \dots, \quad \left(\frac{\partial p_1}{\partial q_m}\right) = \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_1}\right).$$

Es läßt sich auf Grund der obigen Festsetzungen so schreiben:

$$\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_2}\right) + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right),$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_3}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_3}\right) + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_3}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_3} = \left(\frac{\partial p_3}{\partial q_1}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_m}\right) + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_m} = \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_1}\right).$$

Diese Gleichungen können mit Hilfe der Bedingungsgleichungen auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_3}\right) + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right),$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_3}\right) + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_3} = \left(\frac{\partial p_3}{\partial q_1}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_3}\right) + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial q_m} = \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_1}\right).$$

Wir wollen die 2-te, 3-te, ..., $(m-1)$-te Gleichung mit $\frac{\partial p_2}{\partial p_3}, \frac{\partial p_2}{\partial p_4}, \cdots, \frac{\partial p_2}{\partial p_m}$ multipliziert von der ersten abziehen, die 3-te, 4-te, ..., $(m-1)$-te Gleichung mit $\frac{\partial p_3}{\partial p_4}, \frac{\partial p_3}{\partial p_5}, \cdots, \frac{\partial p_3}{\partial p_m}$ multipliziert von der zweiten, die 4-te, 5-te, ..., $(m-1)$-te Gleichung mit $\frac{\partial p_4}{\partial p_5}, \frac{\partial p_4}{\partial p_6}, \cdots, \frac{\partial p_4}{\partial p_m}$ multipliziert von der dritten usw. Ist dies ausgeführt, so erhalten wir ein anderes Gleichungssystem, das mit dem früheren äquivalent ist und so lautet:

$$
\text{(A)}\left\{\begin{aligned}
&1)\ \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_2}+\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_2}{\partial q_3}+\frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_2}{\partial q_4}+\cdots+\frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_2}{\partial q_m}\\
&\qquad+\frac{\partial p_1}{\partial q_2}-\frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_1}{\partial q_3}-\frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_1}{\partial q_4}-\cdots-\frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_1}{\partial q_m}=\frac{\partial p_2}{\partial q_1},\\
&2)\ \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_3}{\partial q_2}+\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial q_3}+\frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_3}{\partial q_4}+\cdots+\frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_3}{\partial q_m}\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial p_1}{\partial q_3}-\frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial p_1}{\partial q_4}-\cdots-\frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial p_1}{\partial q_m}=\frac{\partial p_3}{\partial q_1},\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&m-1)\ \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_m}{\partial q_2}+\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_m}{\partial q_3}+\frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_m}{\partial q_4}+\cdots+\frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial q_m}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{\partial p_1}{\partial q_m}=\frac{\partial p_m}{\partial q_1}.
\end{aligned}\right.
$$

Aus diesen Gleichungen sind die eingeklammerten partiellen Ableitungen verschwunden.

§ 4. Das zweite System von Bedingungsgleichungen (es entspricht dem Werte $i=2$) ist das folgende:

$$\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_3}\right)=\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_2}\right),\quad \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_4}\right)=\left(\frac{\partial p_4}{\partial q_2}\right),\quad \cdots,\quad \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_m}\right)=\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_2}\right).$$

Bezeichnet k irgend eine der Zahlen $3, 4, \ldots, m$, so kann die Gleichung $\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_k}\right)=\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_2}\right)$ auch so geschrieben werden:

$$\frac{\partial p_2}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial p_2}{\partial p_4}\left(\frac{\partial p_4}{\partial q_k}\right)+\cdots+\frac{\partial p_2}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial p_2}{\partial q_k}=\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_2}\right).$$

Sie geht, wenn man die Gleichung $\left(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right)$ benutzt, in die folgende über:

$$\frac{\partial p_2}{\partial p_3}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_3}\right) + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_4}\right) + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_2}{\partial q_k} = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_2}\right).$$

Wir bezeichnen die den Werten 3, 4, ..., m des Index k entsprechenden Gleichungen als 1-te, 2-te, ..., $(m-2)$-te. Alsdann wollen wir die 2-te, 3-te, ..., $(m-2)$-te Gleichung mit $\frac{\partial p_3}{\partial p_4}, \frac{\partial p_3}{\partial p_5}, \cdots, \frac{\partial p_3}{\partial p_m}$ multipliziert von der ersten abziehen, die 3-te, 4-te, ..., $(m-2)$-te Gleichung mit $\frac{\partial p_4}{\partial p_5}, \frac{\partial p_4}{\partial p_6}, \cdots, \frac{\partial p_4}{\partial p_m}$ multipliziert von der zweiten usw. Ist dies durchgeführt, so erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\text{B)}\begin{cases} 1) \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial q_3} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_3}{\partial q_4} + \frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial p_3}{\partial q_5} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_3}{\partial q_m} \\ \qquad + \frac{\partial p_2}{\partial q_3} - \frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial p_2}{\partial q_4} - \frac{\partial p_3}{\partial p_5}\frac{\partial p_2}{\partial q_5} - \cdots - \frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial p_2}{\partial q_m} = \frac{\partial p_3}{\partial q_2}, \\ 2) \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_4}{\partial q_3} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_4} + \frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial p_4}{\partial q_5} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad + \frac{\partial p_2}{\partial q_4} - \frac{\partial p_4}{\partial p_5}\frac{\partial p_2}{\partial q_5} - \cdots - \frac{\partial p_4}{\partial p_m}\frac{\partial p_2}{\partial q_m} = \frac{\partial p_4}{\partial q_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m-2) \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_m}{\partial q_3} + \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_m}{\partial q_4} + \frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial p_m}{\partial q_5} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial q_m} \\ \qquad + \frac{\partial p_2}{\partial q_m} = \frac{\partial p_m}{\partial q_2}. \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem geht aus dem früheren (A) hervor, indem man alle Indizes, soweit es die Grenzen gestatten, um eine Einheit vermehrt.

§ 5. In genau derselben Weise wird die allgemeine Gleichung bewiesen

$$\text{(a)}\begin{cases} \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+1}} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_k}{\partial q_m} \\ \qquad + \frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{k+1}} - \cdots - \frac{\partial p_k}{\partial p_m}\frac{\partial p_i}{\partial q_m} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i}, \end{cases}$$

in der i jede der Zahlen 1, 2, ..., $m-1$ bedeuten kann und k für die einzelnen Werte von i jede Zahl größer als i bis zu $k = m$. Diese allgemeine Gleichung umfaßt also $\frac{m(m-1)}{2}$ unter sich verschiedene Gleichungen, die aus ebensoviel Gleichungen

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$$

hergeleitet sind.

Aus der angegebenen läßt sich die gewöhnliche Form der Integrabilitätsbedingungen ableiten.

§ 6. Aus den Gleichungen (a) kann man umgekehrt die zu Anfang angegebenen Bedingungsgleichungen

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$$

gewinnen, d. h. man kann folgendes Theorem beweisen:

Theorem I.

Es werde vorausgesetzt

p_1	als Funktion von	$p_2, p_3, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m,$
p_2	» » »	$p_3, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m,$
. . .	. . .	. . .
p_{m-1}	» » »	$p_m, q_1, \ldots, q_m,$
p_m	» » »	$q_1, \ldots, q_m,$

und diese Funktionen seien so beschaffen, daß man identisch hat

$$\text{(a)} \begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p_k}{\partial q_i} + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_{i+1}} + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_m} \\ \quad + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_k} - \dfrac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}}\dfrac{\partial p_i}{\partial q_{k+1}} - \dfrac{\partial p_k}{\partial p_{k+2}}\dfrac{\partial p_i}{\partial q_{k+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_k}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_i}{\partial q_m}, \end{cases}$$

wobei i jede der Zahlen 1, 2, ..., $m-1$ und k für die einzelnen Werte von i jede der Zahlen $i+1$, $i+2$, ..., m bezeichnen kann, so daß die Gesamtzahl der Gleichungen $\frac{m(m-1)}{2}$ ist. Dann sind jene $\frac{m(m-1)}{2}$

Gleichungen sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingungen dafür, daß der Ausdruck

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m,$$

wenn man $p_1, \ldots, p_m$ alle durch $q_1, \ldots, q_m$ ausdrückt, ein vollständiges Differential wird.

Zweite Form der Integrabilitätsbedingungen.

§ 7. Daß jene Bedingungen notwendig sind, habe ich oben bewiesen; denn ich habe gezeigt, daß sie bestehen, so oft der Ausdruck

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

ein vollständiges Differential ist. Ich werde nunmehr beweisen, daß dieselben Bedingungen hinreichend sind, oder daß, so oft jene $\frac{m(m-1)}{2}$ Gleichungen stattfinden, der Ausdruck $p_1 dq_1 + \cdots + p_m dq_m$ ein vollständiges Differential ist.

Setzt man $k = m$, so wird die angegebene Gleichung

$$(1)\quad 0 = -\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{i+1}}\right) + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial q_m}.$$

Wir machen wieder von den Klammern Gebrauch, wenn wir $p_1, \ldots, p_m$ als Funktionen von $q_1, \ldots, q_m$ allein ansehen. Bei p_m können wir deshalb $\frac{\partial p_m}{\partial q_i}$ schreiben oder $\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_i}\right)$.

Setzt man $k = m - 1$, so kommt:

$$0 = -\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m} + \frac{\partial p_i}{\partial q_{m-1}} - \frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}\frac{\partial p_i}{\partial q_m}.$$

Addieren wir zu dieser Gleichung die mit $\frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}$ multiplizierte Gleichung (1), so ergibt sich:

$$(2)\quad 0 = -\left(\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_{i+1}}\right) + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial q_{m-1}}.$$

Setzt man $k = m - 2$, so kommt:

$$0 = -\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_m}$$
$$+ \frac{\partial p_i}{\partial q_{m-2}} - \frac{\partial p_{m-2}}{\partial p_{m-1}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{m-1}} - \frac{\partial p_{m-2}}{\partial p_m}\frac{\partial p_i}{\partial q_m}.$$

Zu dieser Gleichung addiere ich die Gleichung (1), multipliziert mit $\frac{\partial p_{m-2}}{\partial p_m}$ und die Gleichung (2) multipliziert mit $\frac{\partial p_{m-2}}{\partial p_{m-1}}$. Dann ergibt sich

$$(3)\quad 0 = -\left(\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_{i+1}}\right) + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_{m-2}}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial q_{m-2}}.$$

Fährt man so fort, so beweist man die allgemeine Gleichung:

$$(b)\quad 0 = -\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{i+1}}\right) + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial q_k},$$

in der k alle Werte m, $m-1$, ... bis zu $i+1$ annehmen darf. Erteilt man nun i wieder die Werte $1, 2, \ldots, m-1$, so wird die Anzahl der Gleichungen (b) gerade $\frac{m(m-1)}{2}$.

Dritte, gewöhnliche Form.

§ 8. Aus den Gleichungen (a) des Theorems I habe ich ebensoviele Gleichungen (b) abgeleitet. Jetzt werde ich aus ihnen die Gleichungen

$$(c)\qquad \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$$

ableiten, deren Anzahl dieselbe ist.

Ich will annehmen, daß für alle Zahlen i' und k, die größer als die gegebene Zahl i und nicht größer als m sind, die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{i'}}\right)$$

schon bewiesen seien. Mit ihrer Hilfe kann die Gleichung (b) auf folgende Form gebracht werden:

$$0 = -\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_k}\right) + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial q_k}.$$

Diese Gleichung ist dieselbe wie

$$0 = -\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right).$$

Man darf hier auch $k = i$ setzen, da dann eine Identität entsteht.

Gelten also die Gleichungen (b), und ist die Gleichung

$$\left(\frac{\partial p_i'}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i'}\right)$$

für die Werte $i+1$, $i+2$, ..., m der Indizes i' und k bestätigt, so gilt sie auch für die Werte i, $i+1$, ..., m dieser Indizes.

Setzt man $i = m - 1$, so kommt in der Gleichung (b) dem k nur der eine Wert $k = m$ zu, so daß sie lautet:

$$0 = -\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{m-1}}\right) + \frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_m}\right) + \frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m}$$

oder

$$0 = -\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{m-1}}\right) + \left(\frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m}\right).$$

Es gelten also die Gleichungen (c), in denen $k > i$ angenommen werde, wenn $i = m - 1$ ist. Nach dem Obigen werden sie deshalb auch gelten, wenn $i = m - 2$ ist, folglich auch, wenn $i = m - 3$ ist, usw.; d. h. die Gleichungen (c) werden gelten für die sämtlichen Werte $m-1$, $m-2$, ..., 2, 1 des Index i, was zu beweisen war. Nachdem die Gleichungen (c) bestätigt sind, folgt, daß der Ausdruck

$$p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 + \cdots + p_m\, dq_m$$

ein vollständiges Differential ist.

Ich habe das System der $\frac{m(m-1)}{2}$ Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit der vorstehende Ausdruck ein vollständiges Differential wird, unter drei Formen (a), (b), (c)

angegeben. Unter ihnen ist die Form (a) zur Lösung des vorgelegten Problems, d. h. zur Bestimmung der Funktionen $p_1, \dots, p_m$, die jenen Ausdruck zu einem vollständigen Differential machen, besonders geeignet.

Die Integrationen, welche die Lösung des vorgelegten Problems auf Grund der ersten Form der Integrabilitätsbedingungen verlangt.

§ 9. Nach diesen Vorbereitungen können die auszuführenden Integrationen schon genauer beschrieben werden. Das Problem läuft nämlich hinaus auf die Bestimmung der Funktionen $p_1, p_2, \dots, p_m$, die den Gleichungen (a) genügen. p_1 selbst ist durch die vorgelegte partielle Differentialgleichung als Funktion von $p_2, p_3, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$ gegeben. Setzt man darauf in (a) $i = 1$, $k = 2$, so wird p_2 als Funktion von $p_3, p_4, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$ bestimmt durch die Gleichung

$$(1) \quad \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \frac{\partial p_2}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_2} - \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_2}{\partial q_3} - \dots - \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_2}{\partial q_m} + \frac{\partial p_1}{\partial q_3}\frac{\partial p_2}{\partial p_3} + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial p_2}{\partial p_m}.$$

Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung, deren Integration bekannt ist.[3]) Nach Auffindung einer Funktion p_2, die der vorstehenden Gleichung genügt, wollen wir in (a) $i = 1, 2$ und $k = 3$ setzen. Dann ergeben sich die Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial q_3} = \dfrac{\partial p_3}{\partial q_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_2}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_2} - \dots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_m} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_4}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_4} + \dots + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_m}, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial q_3} = \dfrac{\partial p_3}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_3} - \dots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial q_m} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_4}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_4} + \dots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_3}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Wenn man p_1 nicht als Funktion von $p_2, p_3, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$ betrachten will, sondern nach Einsetzung des für p_2 durch die Integration der Gleichung (1) gefundenen Wertes als Funktion von $p_3, p_4, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$, wie p_2, so multipliziere

man die zweite Gleichung mit $\frac{\partial p_1}{\partial p_2}$ und addiere sie zur ersten. Dann erhält man, falls p_1 und p_2 als Funktionen der übrigen Größen betrachtet werden,

$$(2^*)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial q_3} &= \frac{\partial p_3}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial q_3} - \frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_3}{\partial q_4} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_3}{\partial q_m} \\ &\qquad + \frac{\partial p_1}{\partial q_4}\frac{\partial p_3}{\partial p_4} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial p_3}{\partial p_m}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial q_3} &= \frac{\partial p_3}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial q_3} - \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_3}{\partial q_4} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_3}{\partial q_m} \\ &\qquad + \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial p_3}{\partial p_4} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial p_3}{\partial p_m}. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen gehen durch Vertauschung der Indizes 1 und 2 ineinander über. Durch die beiden Gleichungen (2) oder (2*) ist p_3 als Funktion von $p_4, p_5, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_m$ zu bestimmen.

§ 10. Ist durch die Integration der obigen Gleichungen auch die Funktion p_3 gefunden, so setze man in (a) $i = 1, 2, 3$ und $k = 4$. Alsdann ergeben sich die drei Gleichungen:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial q_4} &= \frac{\partial p_4}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_4}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ &\qquad + \frac{\partial p_1}{\partial q_5}\frac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial p_4}{\partial p_m}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial q_4} &= \frac{\partial p_4}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_4}{\partial q_3} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ &\qquad + \frac{\partial p_2}{\partial q_5}\frac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial p_4}{\partial p_m}, \\ \frac{\partial p_3}{\partial q_4} &= \frac{\partial p_4}{\partial q_3} - \frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_4} - \cdots - \frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ &\qquad + \frac{\partial p_3}{\partial q_5}\frac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_3}{\partial q_m}\frac{\partial p_4}{\partial p_m}. \end{aligned}\right.$$

Setzt man für p_2 und p_3 die durch die schon erledigten Integrationen gefundenen Ausdrücke ein, um dann p_1, p_2, p_3 alle als Funktionen von $p_4, p_5, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_m$ allein zu

betrachten und auf diese Annahme die partiellen Differentiationen zu beziehen, so hat man die dritte Gleichung mit $\frac{\partial p_2}{\partial p_3}$ multipliziert zur zweiten zu addieren, wodurch sich ergibt:

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_4} = \frac{\partial p_4}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_4} - \frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m} + \frac{\partial p_2}{\partial q_5}\frac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial p_4}{\partial p_m}.$$

Diese Gleichung multipliziere man mit $\frac{\partial p_1}{\partial p_2}$, die dritte Gleichung (3) mit $\frac{\partial p_1}{\partial p_3}$ und addiere beide zur ersten. Dann ergibt sich:

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_4} = \frac{\partial p_4}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_4} - \frac{\partial p_1}{\partial p_5}\frac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m} + \frac{\partial p_1}{\partial q_5}\frac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial p_4}{\partial p_m}.$$

Es ist also p_4 so als Funktion von $p_5, p_6, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ zu bestimmen, daß sie die drei folgenden Gleichungen erfüllt, in denen p_1, p_2, p_3 Funktionen von $p_4, p_5, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ sind, wie sie sich durch die vorangehenden Integrationen bestimmt haben:

$$(3^*)\quad \begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial q_4} = \frac{\partial p_4}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_4} - \frac{\partial p_1}{\partial p_5}\frac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad + \frac{\partial p_1}{\partial q_5}\frac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial p_4}{\partial p_m}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial q_4} = \frac{\partial p_4}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_4} - \frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad + \frac{\partial p_2}{\partial q_5}\frac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial p_4}{\partial p_m}, \\ \frac{\partial p_3}{\partial q_4} = \frac{\partial p_4}{\partial q_3} - \frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial p_4}{\partial q_4} - \frac{\partial p_3}{\partial p_5}\frac{\partial p_4}{\partial q_5} - \cdots - \frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial p_4}{\partial q_m} \\ \qquad + \frac{\partial p_3}{\partial q_5}\frac{\partial p_4}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_3}{\partial q_m}\frac{\partial p_4}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Diese drei Gleichungen sind sich sehr ähnlich und gehen durch Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 ineinander über.

Die simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen, denen man zur Ermittelung der einzelnen Größen p genügen muß, zugleich eine vierte Form der Integrabilitätsbedingungen.

§ 11. Fährt man so fort, und sind $p_1, p_2, \ldots, p_i$ als Funktionen von $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ bestimmt, so wird allgemein p_{i+1} als Funktion von $p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ durch folgende Gleichungen zu bestimmen sein, deren Anzahl i ist:

$$(\alpha)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}} &= \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\
&\quad + \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}, \\
\frac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}} &= \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_2}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\
&\quad + \frac{\partial p_2}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial p_i}{\partial q_{i+1}} &= \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\
&\quad + \frac{\partial p_i}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial q_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}.
\end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen (α) bilden eine vierte Form, in der man die Integrabilitätsbedingungen des Ausdrucks $p_1 dq_1 + \cdots + p_m dq_m$ darstellen kann. Aus dieser Form ist folgendes zu ersehen. Ist p_1 durch die vorgelegte partielle Differentialgleichung selbst als Funktion der übrigen Größen gegeben, so findet man p_2 durch Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung in $2m-1$ Veränderlichen; darauf muß p_3 zwei linearen partiellen Differentialgleichungen zugleich genügen, deren jede sich auf $2m-3$ Veränderliche bezieht; darauf muß p_4 drei linearen partiellen Differentialgleichungen zugleich genügen, deren jede sich auf $2m-5$ Veränderliche bezieht usw. Allgemein wird, nachdem die Ausdrücke von $p_1, p_2, \ldots, p_i$ durch die Größen $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ gefunden sind, p_{i+1} durch i lineare partielle Differentialgleichungen bestimmt, denen es einzeln genügen muß, und deren jede sich auf $2m-2i+1$ Veränderliche bezieht. Wir

sehen also, daß bei der Aufsuchung jeder folgenden Funktion die Zahl der Veränderlichen um zwei Einheiten abnimmt. Freilich nimmt die Zahl der Gleichungen, denen die gesuchte Funktion genügen muß, bei jeder folgenden Funktion um eine Einheit zu. Es wird sich aber weiter unten zeigen, daß diese simultane Integration, die die Analysten abgeschreckt zu haben scheint, nicht mit so großen Schwierigkeiten behaftet ist.[4] Bevor ich aber zu dieser simultanen Integration selbst schreite, werde ich die Integrabilitätsbedingungen noch unter anderen Formen darstellen.

Theorem über die allgemeinste Form der Integrabilitätsbedingungen.

§ 12. Wenn wir k statt $i+1$ schreiben und mit i eine beliebige Zahl kleiner als k bezeichnen, so können wir die Gleichungen (α) so darstellen:

$$(\alpha)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial p_i}{\partial q_k} + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_k}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_k} + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{k+1}}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_{k+1}} + \cdots + \dfrac{\partial p_i}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_k}{\partial q_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_k}{\partial q_i} \qquad - \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{k+1}}\dfrac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}} - \cdots - \dfrac{\partial p_i}{\partial q_m}\dfrac{\partial p_k}{\partial p_m}. \end{cases}$$

In dieser Gleichung ist p_k eine Funktion von $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$; die Funktion p_i enthält jedoch außer diesen Größen noch p_k. Nun ist aber klar, daß der Ausdruck

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_{k'}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}} - \frac{\partial p_i}{\partial q_{k'}}\frac{\partial p_k}{\partial p_{k'}}$$

derselbe bleibt, mag man bei der Bildung von $\dfrac{\partial p_i}{\partial p_{k'}}$, $\dfrac{\partial p_i}{\partial q_{k'}}$ darauf Rücksicht nehmen, daß $p_{k'}$, $q_{k'}$ auch in p_k stecken, oder sie nur, wie es in der obigen Gleichung vorausgesetzt ist, beachten, sofern sie in p_i explizite neben p_k auftreten. Im ersteren Falle werden nämlich die Glieder

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial p_{k'}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}} - \frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\frac{\partial p_k}{\partial p_{k'}}\right)$$

hinzutreten, die sich fortheben. Außerdem darf man, wenn bei der Differentiation von p_i nach q_k beachtet wird, daß q_k

auch in p_k eingeht, das in dem Ausdruck von p_i vorkommt, $\frac{\partial p_i}{\partial p_k}$ für $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} + \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q_k}$ schreiben. Man darf daher die obige Gleichung, wenn man p_i und p_k als Funktionen von $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ allein betrachtet, folgendermaßen schreiben:

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_i}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial p_k}{\partial q_{k+1}} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_k}{\partial q_m} \\ - \frac{\partial p_i}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial p_k}{\partial p_{k+1}} - \cdots - \frac{\partial p_i}{\partial q_m}\frac{\partial p_k}{\partial p_m}. \end{aligned}\right.$$

Die durch die angehängten Indizes bezeichnete Reihenfolge, in die wir die Veränderlichen q und die zugehörigen p gebracht haben, ist vollkommen willkürlich. Deshalb können in der vorstehenden Formel (β) die Veränderlichen q_i, q_k zwei beliebige unter den Veränderlichen q sein und $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_m$ beliebige andere q, die von jenen verschieden sind; ihre Anzahl ist irgend eine, aber nicht größer als $m - 2$. Sie müssen jedoch von q_i, q_k als verschieden vorausgesetzt werden, weil in Formel (β) die Annahme $i < k$ gemacht ist, so daß i unter den Zahlen $k + 1, k + 2, \ldots, m$ nicht vorkommt. Wir haben also folgendes Theorem:[5])

Theorem II.

Es seien $p_1, \ldots, p_m$ solche Funktionen von $q_1, \ldots, q_m$, daß der Ausdruck

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

ein vollständiges Differential ist. Werden dann irgend zwei p, etwa p_i und p_k, durch $q_1, \ldots, q_m$ und durch beliebig viele andere, von p_i und p_k verschiedene p, etwa $p_\lambda, p_\mu, \ldots$, ausgedrückt, was auf unendlich viele Weisen geschehen kann, und werden die auszuführenden partiellen Differentiationen auf diese Darstellung bezogen, so hat man

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial p_i}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_k}{\partial q_\mu} + \cdots \\ - \frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial p_i}{\partial q_\mu}\frac{\partial p_k}{\partial p_\mu} - \cdots. \end{aligned}$$

Es ist nicht einmal nötig, daß im vorstehenden Theorem p_i und p_k dieselben p oder dieselbe Zahl von Größen p enthalten; denn der Fall, daß eine Funktion gegebene Größen enthält, umfaßt den, daß die Funktion einige von diesen Größen oder alle nicht in sich schließt.

Direkter Beweis des obigen Theorems.

§ 13. Das vorstehende Theorem läßt sich mit Leichtigkeit auch direkt aus den Gleichungen

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$$

ableiten. Zunächst nämlich kann man bestätigen, daß in der angegebenen Formel der Ausdruck rechts ungeändert bleibt, wenn man die Ableitungen nach q_λ, q_μ, ... in Klammern einschließt, daß man also hat

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial p_i}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_k}{\partial q_\mu} + \cdots \\ &-\frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial p_k}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_i}{\partial q_\mu} - \cdots \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_\mu}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\mu}\right) + \cdots \\ &-\frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\right) - \frac{\partial p_k}{\partial p_\mu}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_\mu}\right) - \cdots \end{aligned}\right.$$

Stellen wir in der Tat die rechte Seite der obigen Gleichung in der folgenden Weise dar:

$$\sum_\lambda \frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}\right) - \sum_\lambda \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\right),$$

wobei der beigefügte Index λ andeutet, daß die Summe sich über alle Werte λ, μ, ... erstrecken soll. Es wird dann weiter sein

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}\right) = \frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda} + \sum_{\lambda'} \frac{\partial p_k}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right),$$

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\right) = \frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda} + \sum_{\lambda'} \frac{\partial p_i}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right),$$

wobei der beigefügte Index λ' wieder andeutet, daß die Summe sich über dieselben Werte λ, μ, ... erstreckt.

Hieraus ergibt sich:

$$\sum_\lambda \left\{\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda}\right) - \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\right)\right\} - \sum_\lambda \left\{\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\right\}$$

$$= \sum_\lambda \left\{\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\sum_{\lambda'}\frac{\partial p_k}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right) - \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\sum_{\lambda'}\frac{\partial p_i}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right)\right\}$$

$$= \sum_\lambda\sum_{\lambda'}\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right) - \sum_\lambda\sum_{\lambda'}\frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_i}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right).$$

Da den Indizes λ und λ' genau dieselben Werte zukommen, so darf man in den beiden obigen Summen λ und λ' miteinander vertauschen. Macht man das in der zweiten, so wird unser Ausdruck:

$$\sum_\lambda\sum_{\lambda'}\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial p_{\lambda'}}\left\{\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right) - \left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{\lambda'}}\right)\right\}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber, weil

$$\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\lambda}\right) = \left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{\lambda'}}\right)$$

ist. Damit ist die Gleichung (1) bestätigt.

Nun folgt aus Gleichung (1):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial p_i}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_k}{\partial q_\mu} + \cdots \\
&- \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial p_k}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_i}{\partial q_\mu} - \cdots \\
&= \frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial p_i}{\partial p_\mu}\left(\frac{\partial p_\mu}{\partial q_k}\right) + \cdots \\
&- \frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial p_k}{\partial p_\mu}\left(\frac{\partial p_\mu}{\partial q_i}\right) - \cdots \\
&= \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) - \frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \\
&= -\frac{\partial p_i}{\partial q_k} + \frac{\partial p_k}{\partial q_i},
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Setzt man in den Formeln (β) i statt k und λ statt i, so geht aus jenen Formeln oder aus Theorem II hervor, daß in den Formeln (α) $p_1, p_2, \ldots, p_i$ solche Funktionen von $q_1, \ldots, q_m, p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_m$ sind, bei denen je zwei, $p_\varkappa, p_\lambda$, in der Beziehung stehen

$$\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_\varkappa} = \frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_m} \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m} - \frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_m} \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m}.$$

Diese Relation ist es, die, wie wir weiter unten sehen werden, bewirkt, daß sich die Gleichungen (α) zusammen integrieren lassen.

Andere Darlegung des Problems. Die Funktionen, die gleich Konstanten gesetzt die Ausdrücke p_i durch $q_1, \ldots, q_m$ liefern, werden durch $\frac{m(m-1)}{2}$ simultane Gleichungen definiert.

§ 14. Das Problem der vollständigen Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $m+1$ Veränderlichen $V, q_1, \ldots, q_m$, die die gesuchte Funktion V selbst nicht enthält, läßt sich auch so darstellen.

Es sei V eine Funktion von $q_1, \ldots, q_m$, die m Konstanten $h_1, \ldots, h_m$ einschließt, von denen keine nur additiv ist; $p_1, \ldots, p_m$ seien die partiellen Ableitungen von V nach $q_1, \ldots, q_m$. Da diese Ableitungen auch die Konstanten $h_1, \ldots, h_m$ einschließen, so können umgekehrt $h_1, \ldots, h_m$ gleich Funktionen von $q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m$ gesetzt werden. Die so gefundenen Gleichungen seien:

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \quad \ldots, \quad H_m = h_m;$$

dabei bezeichnen $H_1, \ldots, H_m$ Funktionen von $q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m$, die voneinander unabhängig sind und keine der Konstanten $h_1, \ldots, h_m$ einschließen. Es wird verlangt, wenn eine dieser Gleichungen, z. B. $H_1 = h_1$, gegeben ist, die übrigen $m-1$ aufzufinden.

Wir wollen die identischen Bedingungsgleichungen suchen, denen die Funktionen $H_1, \ldots, H_m$ genügen müssen, damit, wenn $p_1, \ldots, p_m$ durch $q_1, \ldots, q_m$ mit Hilfe der Gleichungen

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \quad \ldots, \quad H_m = h_m$$

ausgedrückt sind, der Differentialausdruck

$$p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \cdots + p_m\,dq_m$$

ein vollständiges Differential dV wird.

Setzen wir in Theorem II an Stelle der Indizes i, k die Indizes 1, 2 und an Stelle der Indizes λ, μ, ... alle übrigen, 3, 4, ..., m. Dann ergibt sich die Gleichung:

$$(1)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial p_1}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial q_1} + \dfrac{\partial p_1}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_2}{\partial q_3} + \dfrac{\partial p_1}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_2}{\partial q_4} + \cdots + \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_2}{\partial q_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_3}\dfrac{\partial p_1}{\partial q_3} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_4}\dfrac{\partial p_1}{\partial q_4} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m}\dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}. \end{cases}$$

Es seien

$$H_i = h_i, \quad H_k = h_k$$

irgend zwei der angegebenen Gleichungen, mit deren Hilfe sich p_1 und p_2 als Funktionen der $p_3, p_4, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ bestimmen lassen, also der Größen, von denen in der obigen Gleichung p_1 und p_2 Funktionen sein sollen. Man bilde nun die partiellen Ableitungen von p_1 und p_2 nach jenen Größen und setze für die in diesen Ableitungen auftretenden Konstanten h_i und h_k die ihnen gleichen Funktionen H_i und H_k ein. Dann ergeben sich Ausdrücke, die nur die Größen $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ enthalten und keine Konstante h. Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung (1) ein, so muß sie zu einer Identität werden; denn es kann zwischen den Größen $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ keine von den Konstanten $h_1, \ldots, h_m$ gänzlich freie Gleichung bestehen außer einer Identität.

Um die in Gleichung (1) einzusetzenden Ausdrücke der partiellen Ableitungen von p_1 und p_2 zu ermitteln, wollen wir die Gleichungen

$$H_i = h_i, \quad H_k = h_k$$

nach $p_3, p_4, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ differenzieren. Es seien r und t irgend zwei dieser Größen. Dann wird

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial r} = -\frac{\partial H_i}{\partial r},$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial t} = -\frac{\partial H_i}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial H_k}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial r} = -\frac{\partial H_k}{\partial r},$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial H_k}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial t} = -\frac{\partial H_k}{\partial t}.$$

Multiplizieren wir die erste und vierte, die zweite und dritte, so gewinnen wir durch Subtraktion der Produkte

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_2}-\frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}\right)\left(\frac{\partial p_1}{\partial r}\frac{\partial p_2}{\partial t}-\frac{\partial p_2}{\partial r}\frac{\partial p_1}{\partial t}\right) \\ \qquad =\frac{\partial H_i}{\partial r}\frac{\partial H_k}{\partial t}-\frac{\partial H_i}{\partial t}\frac{\partial H_k}{\partial r}. \end{cases}$$

Ferner folgt aus der ersten und dritten Gleichung

$$(3)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_2}-\frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}\right)\frac{\partial p_1}{\partial r}=\frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial r}-\frac{\partial H_i}{\partial r}\frac{\partial H_k}{\partial p_2}, \\ -\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_2}-\frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}\right)\frac{\partial p_2}{\partial r}=\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial r}-\frac{\partial H_i}{\partial r}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}. \end{cases}$$

Multiplizieren wir Gleichung (1) mit

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_2}-\frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}$$

und setzen in den Gleichungen (3) q_1 und q_2 für r, in der Gleichung (2) $q_3, q_4, \ldots, q_m$ für r und gleichzeitig bezüglich $p_3, p_4, \ldots, p_m$ für t. Dadurch ergibt sich aus (1)

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial q_1}+\frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial q_2}+\cdots+\frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_k}{\partial q_m} \\ -\frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}-\frac{\partial H_i}{\partial q_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_2}-\cdots-\frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_k}{\partial p_m}=0. \end{cases}$$

Dies ist die gesuchte, von den Konstanten h gänzlich freie Identität.

§ 15. Wenn in der Gleichung (γ) den Indizes i und k alle Werte beigelegt werden, die sie annehmen können, so gewinnen wir $\frac{m(m-1)}{2}$ Gleichungen, die ebenfalls als Bedingungen dafür betrachtet werden dürfen, daß der Ausdruck

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

integrierbar wird. Man hat nämlich auch das umgekehrte Theorem:

Theorem III.

Es seien $H_1, \ldots, H_m$ voneinander unabhängige Funktionen der Veränderlichen $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$, und je zwei von ihnen, H_i und $H_{i'}$, mögen der Gleichung genügen:

$$0 = \frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_1} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_m}$$
$$- \frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_1} - \frac{\partial H_i}{\partial q_2}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_2} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_m}.$$

Wenn man dann aus den Gleichungen

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \ldots, H_m = h_m,$$

worin $h_1, \ldots, h_m$ willkürliche, in die Funktionen $H_1, \ldots, H_m$ nicht eingehende Konstanten sind, die Werte von $p_1, \ldots, p_m$ ausgedrückt durch $q_1, \ldots, q_m$ berechnet, so wird der Ausdruck

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

ein vollständiges Differential.[6])

Das ist ein sehr wichtiges Theorem.

Das obige Theorem über die Lösung des Problems, definiert durch $\frac{m(m-1)}{2}$ simultane Gleichungen, wird direkt nachgewiesen.

§ 16. Als direkter Beweis des vorstehenden Theorems bietet sich der folgende dar. Durch Differentiation der Gleichung $H_i = h_i$ nach $q_{k'}$ ergibt sich, wenn durch das dem Summenzeichen angefügte k angedeutet wird, daß sich die Summation über die Werte $1, 2, \ldots, m$ von k erstreckt*):

$$\sum_k \frac{\partial H_i}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) + \frac{\partial H_i}{\partial q_{k'}} = 0.$$

*) Eine ähnliche Bezeichnungsweise werde ich im folgenden öfter gebrauchen, sobald hinter dem Summenzeichen mehrere Indizes stehen, von denen die einen konstant, die andern sozusagen summierende sind; der größeren Deutlichkeit halber werde ich die letzteren unter das Summenzeichen setzen.

Daraus folgt, wenn man noch mit $\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}}$ multipliziert,

$$\sum_k \frac{\partial H_i}{\partial p_k} \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}} \left(\frac{\partial p_k}{\partial p_{k'}}\right) + \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}} \frac{\partial H_i}{\partial q_{k'}} = 0 .$$

Setzt man in dieser Gleichung für k' alle seine Werte $1, 2, \ldots, m$, so kommt

$$\sum_k \sum_{k'} \frac{\partial H_i}{\partial p_k} \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}} \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) + \sum_{k'} \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}} \frac{\partial H_i}{\partial q_{k'}} = 0 .$$

Daraus ergibt sich durch Vertauschung von H_i und $H_{i'}$

$$\sum_k \sum_{k'} \frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}} \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) + \sum_{k'} \frac{\partial H_{i'}}{\partial q_{k'}} \frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}} = 0 .$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so gewinnt man, da nach der Voraussetzung

$$\sum_{k'} \left(\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}} \frac{\partial H_i}{\partial q_{k'}} - \frac{\partial H_{i'}}{\partial q_{k'}} \frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}} \right) = 0$$

ist,

$$\sum_k \sum_{k'} \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_k} \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}} \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_k} \right) \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) = 0 .$$

Vertauscht man k und k', denen ja dieselben Werte $1, \ldots, m$ zukommen, so läßt sich der Ausdruck auf der linken Seite auch so schreiben:

$$-\sum_k \sum_{k'} \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_k} \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}} \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_k} \right) \left(\frac{\partial p_{k'}}{\partial p_k}\right) .$$

Wir können daher die obige Gleichung auch folgendermaßen darstellen:

$$\sum \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_k} \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}} \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_k} \right) \left\{ \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) - \left(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\right) \right\} = 0 ,$$

wobei die Summation sich über alle $\frac{m(m-1)}{2}$ Kombinationen der für k und k' zu setzenden Zahlen $1, \ldots, m$ erstreckt, so daß dem k hinter dem Summenzeichen die Werte $1, \ldots, m-1$ beizulegen sind, und für jedes k dem k' die Werte $k+1, \ldots, m$.

Wenn in der obigen Gleichung für i und i' alle möglichen Zahlen aus der Reihe $1, \ldots, m$ gesetzt werden, so ergeben sich $\frac{m(m-1)}{2}$ Gleichungen. Betrachten wir in ihnen die Größen

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) - \left(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\right)$$

als die Unbekannten, so sind die Gleichungen in bezug auf diese Unbekannten linear, die Zahl der Gleichungen und Unbekannten ist dieselbe, und die konstanten Bestandteile sind alle Null. Daher müssen auch die Unbekannten sämtlich verschwinden, d. h. es wird für alle Werte von k und k'

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) - \left(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\right) = 0,$$

was zu beweisen war.

Durch das obige Beweisverfahren hätte auch am direktesten bestätigt werden können, daß, wenn

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right) - \left(\frac{\partial p_{k'}}{\partial q_k}\right) = 0,$$

d. h.

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

integrierbar ist,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_1} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_m}\\ - \frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_1} - \frac{\partial H_i}{\partial q_2}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_2} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_m} = 0\end{aligned}$$

wird. Man kann übrigens bei dem obigen Beweise des Theorems III noch etwas vermissen, nämlich den Nachweis, daß von den $\frac{m(m-1)}{2}$ linearen Gleichungen

$$\sum_{k,k'}\left(\frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial H_i}{\partial p_{k'}}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_k}\right) x_{k,k'} = y_{i,i'},$$

worin die $x_{k,k'}$ die Unbekannten und die $y_{i,i'}$ die konstanten Teile bedeuten, keine aus den andern folgt.

Diesen Nachweis kann man auf verschiedene Weisen leicht erbringen, da doch derartige Gleichungen auf Grund der Elemente der Algebra ohne Schwierigkeit allgemein aufgelöst werden. Die Auflösung wird nur dann illusorisch, wenn man hat

$$\sum \pm \frac{\partial H_1}{\partial p_1} \frac{\partial H_2}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial H_m}{\partial p_m} = 0,$$

wobei die Indizes $1, \ldots, m$ der p hinter dem Summenzeichen auf alle möglichen Arten zu vertauschen und nach einer bekannten Regel die Zeichen $\pm$ zu verteilen sind. Diese Gleichung ist aber die Bedingung dafür, daß zwischen den Größen $H_1, \ldots, H_m, q_1, \ldots, q_m$ eine Gleichung besteht, die von den p frei ist. Wäre das der Fall, so hätte man auch eine Relation zwischen $q_1, \ldots, q_m$ und willkürlichen Konstanten und könnte nicht, wie wir angenommen haben, aus den Gleichungen

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \ \ldots, \ H_m = h_m$$

alle $p_1, \ldots, p_m$ als Funktionen von $q_1, \ldots, q_m$ bestimmen.

Umformung der Gleichungssysteme, durch deren simultane Auflösung nach § 11 die p_i erhalten werden.

§ 17. Um nunmehr an die Integration selbst heranzutreten, wollen wir zu der Form (α) der Bedingungsgleichungen in § 11 zurückkehren. Wir sehen, daß die Schwierigkeit darin liegt, eine Funktion zu finden, die i linearen partiellen Differentialgleichungen auf einmal genügt. Es sei f eine Funktion von $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ und $f = a$ eine Gleichung, durch die die gesuchte Funktion p_{i+1} durch $p_{i+2}, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ bestimmt wird, wobei a eine willkürliche, in f nicht eingehende Konstante ist. Bezeichnet man mit p_n und q_n irgend welche unter den Größen $p_{i+2}, \ldots, p_m$ und $q_1, \ldots, q_m$, so wird

$$\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_n} = -\frac{\partial f}{\partial p_n},$$
$$\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_n} = -\frac{\partial f}{\partial q_n}.$$

Daher gehen die Gleichungen (α), mit $\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}}$ multipliziert, in folgende über:

$$
(\mathrm{d})\left\{\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m} \\
&\quad - \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial f}{\partial q_m}, \\
0 &= \frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_2}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m} \\
&\quad - \frac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_2}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial f}{\partial q_m}, \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \frac{\partial p_i}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m} \\
&\quad - \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+2}} + \cdots - \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial f}{\partial q_m}.
\end{aligned}\right.
$$

In diesen Gleichungen werden $p_1, p_2, \ldots, p_i$ als gegebene Funktionen von $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ betrachtet, und je zwei von ihnen, $p_\varkappa$ und p_λ, stehen in der Beziehung, die ich am Schluß von § 13 angegeben habe; aufzusuchen ist eine Funktion f von $p_{i+1}, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$, die die obigen Gleichungen alle zusammen identisch erfüllt.

Ein Theorem über die simultane Integration der oben erhaltenen Gleichungen.

§ 18. Ich will hier nicht bei der allgemeinen Frage verweilen, wann und wie man zwei oder mehr partiellen Differentialgleichungen durch eine und dieselbe Funktion genügen kann, sondern die Untersuchung auf den vorliegenden besondern Fall beschränken. In ihm kann man nämlich ganz besondere Kunstgriffe benutzen, die zur Erleichterung der Integration dienen. Vor allem ist es folgendes Theorem, durch das die Sache erledigt wird.

Theorem IV.

Es seien $\varkappa$, λ irgend zwei verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, i$; $f = \varphi$ sei ein beliebiges Integral einer der Gleichungen (d):

$$0=\frac{\partial f}{\partial q_\varkappa}+\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m}$$
$$-\frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}}-\cdots-\frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_m}\frac{\partial f}{\partial q_m}.$$

Dann ist der Ausdruck

$$f=\frac{\partial \varphi}{\partial q_\lambda}+\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial \varphi}{\partial p_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m}\frac{\partial \varphi}{\partial p_m}$$
$$-\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial \varphi}{\partial q_{i+1}}-\cdots-\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m}\frac{\partial \varphi}{\partial q_m}$$

ebenfalls ein Integral derselben Gleichung.[7])

In diesem Theorem bezeichnen $p_\varkappa$, p_λ Funktionen von $q_\varkappa, q_\lambda, q_{i+1}, q_{i+2}, \ldots, q_m, p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_m$, die der Gleichung genügen

$$\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_\lambda}-\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_\varkappa}=\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_m}\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m}$$
$$-\frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}}-\cdots-\frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_m}\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m}.$$

Wenn diese Funktionen noch andere von den Größen $q_1, \ldots, q_m$ enthalten, so werden dieselben als Konstanten betrachtet.

Es wird gezeigt, wie auf Grund des obigen Theorems die Integration vor sich geht.

§ 19. Mit Hilfe des vorstehenden Theorems erledigt sich die vorgelegte Integration folgendermaßen: φ'_λ, φ''_λ, φ'''_λ, ... seien die Funktionen, die aus dem Ausdruck

$$\frac{\partial f}{\partial q_\lambda}+\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m}$$
$$-\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}}-\cdots-\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m}\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

hervorgehen, wenn man für f der Reihe nach φ, φ'_λ, φ''_λ, ... setzt, so daß man allgemein hat:

$$\varphi_\lambda^{(n)} = \frac{\partial \varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial \varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m} \frac{\partial \varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial p_m} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial \varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m} \frac{\partial \varphi_\lambda^{(n-1)}}{\partial q_m}.$$

Nun sei $f = \varphi$ irgend ein Integral der Gleichung

$$(1) \quad \begin{cases} 0 = f_1' = \dfrac{\partial f}{\partial q_1} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m} \dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_m} \dfrac{\partial f}{\partial q_m}. \end{cases}$$

Dann werden nach Theorem IV auch φ_2', φ_2'', φ_2''', ... Integrale dieser Gleichung sein. Das wird klar, wenn man in dem genannten Theorem an Stelle von φ nach und nach die Funktionen φ_2', φ_2'', ... einsetzt. Es gibt aber nur $2(m - i)$ voneinander unabhängige Integrale der obigen Gleichung; jedes andere Integral muß eine Funktion von ihnen sein, in die außerdem auch die Größen $q_2, q_3, \ldots, q_i$ gleichsam als Konstanten eingehen können. Es sei also $\varphi_2^{(\mu)}$ die erste Funktion, die sich durch die vorhergehenden Funktionen φ, $\varphi_2', \ldots, \varphi_2^{(\mu-1)}$ und durch $q_2, q_3, \ldots, q_i$ ausdrücken läßt. Der Index μ wird dann kleiner als $2(m - i)$ sein oder höchstens gleich dieser Zahl. Nimmt man an, daß Π eine Funktion von $\varphi, \varphi_2', \varphi_2'', \ldots, \varphi_2^{(\mu-1)}, q_2, q_3, \ldots, q_i$ ist, so wird auch $f = \Pi$ ein Integral der Gleichung (1) sein, da nach Theorem IV $\varphi, \varphi_2', \varphi_2'', \ldots, \varphi_2^{(\mu-1)}$ Integrale von ihr sind, und $q_2, q_3, \ldots, q_i$ in Gleichung (1) die Rolle von Konstanten spielen. Setzt man in der Gleichung

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = f_2' = \dfrac{\partial f}{\partial q_2} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_m} \dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_m} \dfrac{\partial f}{\partial q_m} \end{cases}$$

$f = \Pi$, so nimmt sie die Form an

$$(2a) \quad 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \varphi_2' + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2'} \varphi_2'' + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2^{(\mu-1)}} \varphi_2^{(\mu)} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}.$$

Hier sind φ, φ_2', φ_2'', $\ldots$, $\varphi_2^{(\mu-1)}$, q_2 die unabhängigen Veränderlichen. Die Integration dieser Gleichung liefert nun die Funktion $f = \Pi$, die den beiden Gleichungen (1) und (2) gleichzeitig genügt.

Es kann vorkommen, daß identisch $\varphi_2' = 0$ wird. In diesem Falle hat man ohne weitere Integration in $f = \varphi$, dem Integral der Gleichung (1), auch ein Integral der Gleichung (2). Ist allgemeiner $\varphi_2' = c$, wo c eine Konstante bedeutet, so wird

$$f = \Pi = \varphi - cq_2$$

ein Integral von jeder der Gleichungen (1) und (2) sein.

§ 20. Nachdem eben gezeigt worden ist, wie eine Funktion $f = \Pi$, die den beiden Gleichungen (1) und (2) gleichzeitig genügt, sich finden läßt, was mit Hilfe des Theorems IV gelang, will ich nunmehr mit Hilfe desselben Theorems aus der gefundenen Funktion Π eine andere Ψ ableiten, die für f eingesetzt jene beiden Gleichungen und zugleich die dritte

$$(3) \qquad 0 = f_3' = \frac{\partial f}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_3}{\partial q_m} \frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial p_3}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial p_3}{\partial p_m} \frac{\partial f}{\partial q_m}$$

erfüllt.

Wenn wir nämlich in Theorem IV an Stelle von φ die Funktion Π einsetzen und $\lambda = 3$ annehmen, dem $\varkappa$ dagegen die Werte 1 und 2 erteilen, so werden die Funktionen Π_3', Π_3'', ... Integrale von jeder der Gleichungen (1) und (2) sein. $\Pi_3^{(\mu')}$ sei die erste Funktion, die sich durch die vorangehenden Π_3, Π_3', ..., $\Pi_3^{(\mu'-1)}$ und $q_3, q_4, \ldots, q_i$ ausdrücken läßt: μ' kann hier wieder nicht größer sein als $2(m-i)$. Setzt man $f = \Psi$ und versteht unter Ψ eine Funktion von Π, Π_3', Π_3'', ..., $\Pi_3^{(\mu'-1)}$, q_3, in die auch die Größen $q_4, q_5, \ldots, q_i$ als Konstanten eingehen können, so geht (3) über in:

$$(3\,\text{a}) \quad 0 = \frac{\partial \Psi}{\partial \Pi} \Pi_3' + \frac{\partial \Psi}{\partial \Pi_3'} \Pi_3'' + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial \Pi_3^{(\mu'-1)}} \Pi_3^{(\mu')} + \frac{\partial \Psi}{\partial q_3}.$$

Jedes Integral dieser Gleichung, in der Π, Π_3', ..., $\Pi_3^{(\mu'-1)}$, q_3 die unabhängigen Veränderlichen sind, liefert die gesuchte Funktion $f = \Psi$, die den drei Gleichungen (1), (2), (3) gleichzeitig genügt.

So kann man fortfahren, bis man eine Funktion f erhält, die allen i Gleichungen (d) gleichzeitig genügt.

§ 21. Nach dem Obigen ist der Verlauf der Integrationen, durch die eine allen i Gleichungen (d) genügende Funktion ermittelt werden soll, folgender. Vor allem war zu suchen eine Funktion φ, die der Gleichung (1) genügt. Man hat sie bekanntlich, wenn $\varphi =$ Konst. ein Integral des folgenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ist:

$$\text{(a)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{dp_{i+1}}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}}, & \frac{dq_{i+1}}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}, \\ \frac{dp_{i+2}}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}, & \frac{dq_{i+2}}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}}, \\ \cdots & \cdots \\ \frac{dp_m}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_m}, & \frac{dq_m}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_m}. \end{array} \right.$$

Die Gleichung $\varphi =$ Konst. heißt nämlich ein Integral der gewöhnlichen Differentialgleichungen (a), wenn vermöge dieser Gleichungen identisch $d\varphi = 0$ ist. Das kann nur geschehen, wenn (1) identisch besteht.

Ist die Funktion φ gefunden, so leite man aus ihr die Funktionen $\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(\mu-1)}$ ab — die Indizes lasse ich fort — und drücke $\varphi^{(\mu)}$ durch $q_2, \varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(\mu-1)}$ aus; dieser Ausdruck kann auch mit $q_3, q_4, \ldots, q_i$ als Konstanten behaftet sein. Alsdann findet man eine Funktion Π, die der Gleichung (2a) genügt, wenn $\Pi =$ Konst. irgend ein Integral des folgenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ist:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dq_2}, \; \varphi'' = \frac{d\varphi'}{dq_2}, \ldots, \; \varphi^{(\mu-1)} = \frac{d\varphi^{(\mu-2)}}{dq_2}, \; \varphi^{(\mu)} = \frac{d\varphi^{(\mu-1)}}{dq_2}.$$

Der Ausdruck von $\varphi^{(\mu)}$ sei

$$\varphi^{(\mu)} = \varphi^{(\mu)}(q_2, \varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(\mu-1)}).$$

Ist dann

$$\Pi\left(q_2, \varphi, \frac{d\varphi}{dq_2}, \ldots, \frac{d^{\mu-1}\varphi}{dq_2^{\mu-1}}\right) = \text{Konst.}$$

ein beliebiges Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung μ-ter Ordnung

$$\text{(b)} \qquad \frac{d^\mu \varphi}{dq_2^\mu} = \varphi^{(\mu)}\left(q_2, \varphi, \frac{d\varphi}{dq_2}, \ldots, \frac{d^{\mu-1}\varphi}{dq_2^{\mu-1}}\right)$$

zwischen den beiden Veränderlichen q_2 und φ, so folgt aus dem obigen, daß

$$\Pi(q_2, \varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(\mu-1)})$$

die gesuchte Funktion wird, die den Gleichungen (1) und (2) gleichzeitig genügt.

Drittens leite man aus der Funktion Π die Funktionen Π', Π'', $\ldots$, $\Pi^{(\mu'-1)}$ ab und drücke $\Pi^{(\mu')}$ durch sie und q_3 aus; der gefundene Ausdruck sei

$$\Pi^{(\mu')} = \Pi^{(\mu')}(q_3, \Pi, \Pi', \ldots, \Pi^{(\mu'-1)}).$$

Man stelle die Differentialgleichung μ'ter Ordnung

$$\text{(c)} \qquad \frac{d^{\mu'}\Pi}{dq_3^{\mu'}} = \Pi^{(\mu')}\left(q_3, \Pi, \frac{d\Pi}{dq_3}, \ldots, \frac{d^{\mu'-1}\Pi}{dq_3^{\mu'-1}}\right)$$

zwischen den beiden Veränderlichen q_3 und Π auf. Ist dann

$$\Psi\left(q_3, \Pi, \frac{d\Pi}{dq_3}, \ldots, \frac{d^{\mu'-1}\Pi}{dq_3^{\mu'-1}}\right) = \text{Konst.}$$

ein beliebiges Integral von ihr, so ist der Ausdruck

$$\Psi(q_3, \Pi, \Pi', \ldots, \Pi^{(\mu'-1)})$$

die gesuchte Funktion Ψ, die den drei Gleichungen (1), (2), (3) gleichzeitig genügt. Das wird durch einen ähnlichen Beweis klar, wie wir ihn bei der Aufsuchung von Π gegeben haben. Die Funktion Ψ kann auch mit den Größen $q_4, q_5, \ldots, q_i$ als Konstanten behaftet sein.

So kann man fortfahren, bis man eine Funktion f hat, die allen i Gleichungen (d) genügt. Zu ihrer Auffindung hat man zunächst, was die Hauptsache ist, irgend ein Integral eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung in $2(m-i)+1$ Veränderlichen zu ermitteln; dieses System vertritt die Stelle einer Gleichung $(2m-2i)$ter Ordnung in zwei Veränderlichen. Dann sind nacheinander $i-1$ gewöhnliche Differentialgleichungen in zwei Veränderlichen von der Ordnung $\mu, \mu', \mu'', \ldots, \mu^{(i-2)}$ aufzustellen, und von jeder hat man irgend ein Integral zu finden, das zur Bildung der folgenden Differentialgleichung dient. Die Zahlen μ, μ', μ'', $\ldots, \mu^{(i-2)}$ werden alle kleiner oder jedenfalls nicht größer sein als $2(m-i)$. Wenn $f = a_i$ ein Integral der letzten Gleichung ist, wobei a_i eine willkürliche Konstante bedeutet,

und man entnimmt aus $f = a_i$ den Wert von p_{i+1}, ausgedrückt durch $p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$, so wird er so beschaffen sein, daß er allen Gleichungen (α) des § 11 gleichzeitig genügt. Ist dieser Wert gefunden, so kann man auch $p_1, p_2, \ldots, p_i$, die als gegebene Funktionen von $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ vorausgesetzt werden, durch $p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ ausdrücken, und man kann dann übergehen zur simultanen Integration des nächsten Systems von $i+1$ partiellen Differentialgleichungen, die aus den Gleichungen (α) entstehen, indem man $i+1$ für i setzt: in diesem System ist die Zahl der in den einzelnen Gleichungen enthaltenen Veränderlichen um zwei Einheiten kleiner.

Die gewöhnlichen Differentialgleichungen μ-ter, μ'-ter, ... Ordnung in je zwei Veränderlichen können als Hilfsgleichungen betrachtet werden, während das System (a) von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung mit $2(m-1)+1$ Veränderlichen als das Hauptsystem angesehen werden kann. Reduziert man dieses Hauptsystem, indem man alle Veränderlichen mit Ausnahme zweier und ihrer Differentiale eliminiert, auf eine Differentialgleichung in zwei Veränderlichen, so wird sie bis zur Ordnung $2(m-i)$ aufsteigen und kann nicht zu einer niedrigeren aufsteigen. Dagegen hängt die Ordnung jeder Hilfsgleichung von dem Integral ab, das man für die vorhergehende Hilfsgleichung gefunden hat, und je nachdem man das eine oder das andere gefunden hat, kann die Ordnung größer oder kleiner ausfallen, kann aber doch niemals die Ordnung $2(m-i)$ des Hauptsystems überschreiten. Ja es kann sogar unter den Zahlen $\mu, \mu', \ldots$ solche geben, die verschwinden, so daß man einiger oder selbst aller Hilfsintegrationen gänzlich überhoben wird.

Beschreibung des Verlaufs der Integrationen, durch die nach der angegebenen Methode die Lösung des ganzen Problems erledigt wird.

§ 22. Wenn wir das ganze Verfahren von Anfang an verfolgen, so wird es folgenden Verlauf haben. p_1 ist als Funktion von $p_2, p_3, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ gegeben; das ist die vorgelegte partielle Differentialgleichung. Die übrigen Größen $p_2, p_3, \ldots, p_m$ sind so als Funktionen von $q_1, \ldots, q_m$ zu bestimmen, daß der Ausdruck

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m,$$

nachdem man auch p_1 durch $q_1, \ldots, q_m$ ausgedrückt hat, ein vollständiges Differential wird. Alsdann ist

$$V = \int \{p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m\}$$

die unbekannte Funktion, die der vorgelegten partiellen Differentialgleichung genügt.

Zuerst stellt man das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen auf:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_2}{dq_1} = \dfrac{\partial p_1}{\partial q_2}, & \dfrac{dq_2}{dq_1} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial p_2}, \\ \dfrac{dp_3}{dq_1} = \dfrac{\partial p_1}{\partial q_3}, & \dfrac{dq_3}{dq_1} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial p_3}, \\ \cdots & \cdots \\ \dfrac{dp_m}{dq_1} = \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}, & \dfrac{dq_m}{dq_1} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Ist $f_1 = a_1$ ein beliebiges Integral dieses Systems, wobei a_1 eine willkürliche Konstante bedeutet, so bestimmt sich aus jener Gleichung p_2 als Funktion der Größen $p_3, p_4, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$, wonach auch p_1 sich als Funktion derselben Größen bestimmen läßt. Ist das geschehen, so stellt man das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen auf:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_3}{dq_1} = \dfrac{\partial p_1}{\partial q_3}, & \dfrac{dq_3}{dq_1} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial p_3}, \\ \dfrac{dp_4}{dq_1} = \dfrac{\partial p_1}{\partial q_4}, & \dfrac{dq_4}{dq_1} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial p_4}, \\ \cdots & \cdots \\ \dfrac{dp_m}{dq_1} = \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m}, & \dfrac{dq_m}{dq_1} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Ist $\varphi = \text{Konst.}$ ein Integral dieses Systems, so bildet man die Ausdrücke

$$\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_3}\frac{\partial \varphi}{\partial p_3} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial \varphi}{\partial p_m} - \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial \varphi}{\partial q_3} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial \varphi}{\partial q_m},$$

$$\varphi'' = \frac{\partial \varphi'}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_3}\frac{\partial \varphi'}{\partial p_3} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial \varphi'}{\partial p_m} - \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial \varphi'}{\partial q_3} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial \varphi'}{\partial q_m},$$

usw. usw.

bis man zu einer Funktion

$$\varphi^{(\mu)} = \frac{\partial \varphi^{(\mu-1)}}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_3}\frac{\partial \varphi^{(\mu-1)}}{\partial p_3} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial \varphi^{(\mu-1)}}{\partial p_m} - \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial \varphi^{(\mu-1)}}{\partial q_3} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial \varphi^{(\mu-1)}}{\partial q_m}$$

gelangt, die sich durch die vorhergehenden $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(\mu-1)}$ und q_2 ausdrücken läßt; das wird immer eintreten für eine Zahl $\mu \leqq 2m - 4$. Wenn der Ausdruck von $\varphi^{(\mu)}$

$$\varphi^{(\mu)}(q_2, \varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(\mu-1)})$$

lautet, so wird die Differentialgleichung μ-ter Ordnung

$$\text{(2a)} \qquad \frac{d^\mu \varphi}{dq_2^{\,\mu}} = \varphi^{(\mu)}\left(q_2, \varphi, \frac{d\varphi}{dq_2}, \ldots, \frac{d^{\mu-1}\varphi}{dq_2^{\,\mu-1}}\right)$$

gebildet. Ist

$$f_2\left(q_2, \varphi, \frac{d\varphi}{dq_2}, \ldots, \frac{d^{\mu-1}\varphi}{dq_2^{\,\mu-1}}\right) = a_2$$

ein beliebiges Integral von ihr, wobei a_2 eine willkürliche Konstante bedeutet, so bildet man die Gleichung

$$f_2 = f_2(q_2, \varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(\mu-1)}) = a_2$$

und drückt mit Hilfe der Gleichungen

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2$$

p_1, p_2, p_3 durch $p_4, p_5, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ aus. Ist das geschehen, so stellt man das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen auf:

$$\text{(3)} \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp_4}{dq_1} &= \frac{\partial p_1}{\partial q_4}, & \frac{dq_4}{dq_1} &= -\frac{\partial p_1}{\partial p_4}, \\ \frac{dp_5}{dq_1} &= \frac{\partial p_1}{\partial q_5}, & \frac{dq_5}{dq_1} &= -\frac{\partial p_1}{\partial p_5}, \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\ \frac{dp_m}{dq_1} &= \frac{\partial p_1}{\partial q_m}, & \frac{dq_m}{dq_1} &= -\frac{\partial p_1}{\partial p_m}. \end{aligned}\right.$$

Ist $\Pi =$ Konst. ein Integral dieses Systems, so bildet man die Funktionen:

$$\Pi' = \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial \Pi}{\partial p_4} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial \Pi}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi}{\partial q_4} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial \Pi}{\partial q_m},$$

$$\Pi'' = \frac{\partial \Pi'}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial \Pi'}{\partial p_4} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial \Pi'}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi'}{\partial q_4} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial \Pi'}{\partial q_m},$$

usw. usw.

bis man zu einer Funktion

$$\Pi^{(\nu)} = \frac{\partial \Pi^{(\nu-1)}}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial \Pi^{(\nu-1)}}{\partial p_4} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial \Pi^{(\nu-1)}}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi^{(\nu-1)}}{\partial q_4} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial \Pi^{(\nu-1)}}{\partial q_m}$$

gelangt, die sich durch die vorhergehenden $\Pi, \Pi', \ldots \Pi^{(\nu-1)}$ und q_2 ausdrücken läßt; dabei ist $\nu \leqq 2m - 6$. Dieser Ausdruck kann auch mit q_3 als einer Konstanten behaftet sein. Man schreibt nun für $\Pi^{(\nu)}$ den Ausdruck

$$\Pi^{(\nu)}(q_2, \Pi, \Pi', \ldots \Pi^{(\nu-1)})$$

und stellt die Differentialgleichung ν-ter Ordnung auf:

$$\text{(3a)} \qquad \frac{d^\nu \Pi}{dq_2^{\ \nu}} = \Pi^{(\nu)}\left(q_2, \Pi, \frac{d\Pi}{dq_2}, \ldots, \frac{d^{\nu-1}\Pi}{dq_2^{\ \nu-1}}\right).$$

Ist $\Pi_1 =$ Konst. irgend ein Integral dieser Gleichung, so bildet man die Funktionen:

$$\Pi_1' = \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial q_4}\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_4} + \cdots + \frac{\partial p_3}{\partial q_m}\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_4} - \cdots - \frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_m},$$

$$\Pi_1'' = \frac{\partial \Pi_1'}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi_1'}{\partial p_4} + \cdots + \frac{\partial p_3}{\partial q_m}\frac{\partial \Pi_1'}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial \Pi_1'}{\partial q_4} - \cdots - \frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial \Pi_1'}{\partial q_m},$$

usw. usw.

bis man zu einer Funktion $\Pi_1^{(\nu')}$ gelangt, die sich durch die vorhergehenden $\Pi_1, \Pi_1', \ldots, \Pi_1^{(\nu'-1)}$ und q_3 ausdrücken läßt, wobei wieder $\nu' \leqq 2m - 6$ ist. Lautet dieser Ausdruck

$$\Pi_1^{(\nu')}(q_3, \Pi_1, \Pi_1', \ldots, \Pi_1^{(\nu'-1)}),$$

so stellt man die Differentialgleichung ν'-ter Ordnung auf:

$$\text{(3b)} \quad \frac{d^{\nu'}\Pi_1}{dq_3^{\nu'}} = \Pi_1^{(\nu')}\left(q_3, \Pi_1, \frac{d\Pi_1}{dq_3}, \ldots, \frac{d^{\nu'-1}\Pi_1}{dq_3^{\nu'-1}}\right),$$

von der irgend ein Integral

$$f_3\left(q_3, \Pi_1, \frac{d\Pi_1}{dq_3}, \ldots, \frac{d^{\nu'-1}\Pi_1}{dq_3^{\nu'-1}}\right) = a_3$$

aufgesucht wird, wobei a_3 eine willkürliche Konstante bedeutet. Hat man es gefunden, so bildet man die Gleichung

$$f_3 = f_3(q_3, \Pi_1, \Pi_1', \ldots, \Pi_1^{(\nu'-1)}) = a_3$$

und drückt mit Hilfe der drei Gleichungen

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad f_3 = a_3$$

p_1, p_2, p_3, p_4 als Funktionen von $p_5, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ aus. So geht es weiter. Die ganze Aufgabe läuft auf diese Integrationen hinaus. Hat man nämlich durch die angegebene Methode die Gleichungen

$$f_1 = a_1, f_2 = a_2, \ldots, f_{m-2} = a_{m-2}$$

gefunden, wo $a_1, a_2, \ldots, a_{m-2}$ willkürliche Konstanten sind, und jedes a_i in den Funktionen $f_{i+1}, \ldots, f_{m-2}$, aber in keiner der vorangehenden $f_1, \ldots, f_i$ vorkommt, so drücke man mit Hilfe dieser Gleichungen und der vorgelegten partiellen Differentialgleichung $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ als Funktionen von $p_m, q_1, \ldots, q_m$ aus und stelle die Gleichungen auf:

$$\frac{dp_m}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_m}, \quad \frac{dq_m}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_m}.$$

Sie haben zwei Integrale; das eine sei $\psi =$ Konst., und man bilde die Funktionen

$$\psi' = \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial \psi}{\partial p_m} - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial \psi}{\partial q_m},$$

$$\psi'' = \frac{\partial \psi'}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial \psi'}{\partial p_m} - \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial \psi'}{\partial q_m}.$$

Wenn ψ' eine Funktion von ψ und von $q_2, q_3, \ldots, q_m$ ist:

$$\psi' = \psi'(q_2, \psi),$$

so integriere man die Gleichung erster Ordnung:

$$\frac{d\psi}{dq_2} = \psi'(q_2, \psi).$$

Wenn dagegen ψ' keine Funktion von ψ und von q_2, $q_3, \cdot, \cdot, q_m$ ist, so wird sicher ψ'' eine Funktion von ψ, ψ' und den Größen $q_2, q_3, \ldots, q_m$ sein:

$$\psi'' = \psi''(q_2, \psi, \psi').$$

In diesem Falle suche man ein Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2\psi}{dq_2^2} = \varphi''\left(q_2, \psi, \frac{d\psi}{dq_2}\right).$$

In diesen Gleichungen werden $q_3, q_4, \ldots, q_m$ als Konstanten angesehen. Das Integral dieser oder jener Gleichung sei $\psi_1 =$ Konst., wobei ψ_1 im ersten Falle eine Funktion von q_2, ψ, im zweiten von $q_2, \psi, \dfrac{d\psi}{dq_2}$ bezeichnet, und man ersetze in der Funktion ψ_1 im zweiten Falle $\dfrac{d\psi}{dq_2}$ durch ψ'. Alsdann bilde man wieder die Funktionen

$$\psi_1' = \frac{\partial\psi_1}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial q_m}\frac{\partial\psi_1}{\partial p_m} - \frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_1}{\partial q_m},$$

$$\psi_1'' = \frac{\partial\psi_1'}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial q_m}\frac{\partial\psi_1'}{\partial p_m} - \frac{\partial p_3}{\partial p_m}\frac{\partial\psi_1'}{\partial q_m}.$$

Entweder wird ψ_1' eine Funktion von $\psi_1, q_3, q_4, \ldots, q_m$ sein, oder, wenn das nicht eintritt, sicher ψ_1'' eine Funktion von $\psi_1, \psi_1', q_3, q_4, \ldots, q_m$. Im ersten Falle suche man ein Integral der Gleichung

$$\frac{d\psi_1}{dq_3} = \psi_1',$$

im zweiten Falle eines der Gleichung

$$\frac{d^2\psi_1}{dq_3^2} = \psi_1'',$$

wobei in ψ_1'' für ψ_1' die Größe $\frac{d\psi_1}{dq_3}$ gesetzt wird, und q_4, q_5, ..., q_m sowohl in dieser als auch in jener Gleichung als Konstanten betrachtet werden. Ist das gesuchte Integral $\psi_2 =$ Konst., und wird im zweiten Falle in ψ_2 für $\frac{d\psi_1}{dq_3}$ wieder ψ_1' gesetzt, so leite man nunmehr aus ψ_2 in ähnlicher Weise die Funktion ψ_3 ab, aus ihr ψ_4 und so fort, zuletzt bilde man mit der gefundenen Funktion ψ_{m-3} die Funktion

$$\psi'_{m-3} = \frac{\partial \psi_{m-3}}{\partial q_{m-1}} + \frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m}\frac{\partial \psi_{m-3}}{\partial p_m} - \frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}\frac{\partial \psi_{m-3}}{\partial q_m}.$$

Ist sie eine Funktion von ψ_{m-3}, q_{m-1}, q_m, so suche man ein Integral der Gleichung

$$\frac{d\psi_{m-3}}{dq_{m-1}} = \psi'_{m-3}.$$

Ist sie es nicht, so bilde man noch die Funktion

$$\psi''_{m-3} = \frac{\partial \psi'_{m-3}}{\partial q_{m-1}} + \frac{\partial p_{m-1}}{\partial q_m}\frac{\partial \psi'_{m-3}}{\partial p_m} - \frac{\partial p_{m-1}}{\partial p_m}\frac{\partial \psi'_{m-3}}{\partial q_m}.$$

ψ''_{m-3} wird dann eine Funktion von ψ_{m-3}, ψ'_{m-1}, q_{m-1}, q_m sein. In ihr setze man $\frac{d\psi_{m-3}}{dq_{m-1}}$ für ψ'_{m-3} und suche ein Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\psi_{m-3}}{dq^2_{m-1}} = \psi''_{m-3},$$

wobei man bei dieser wie bei jener Gleichung q_m als eine Konstante betrachtet. Das gesuchte Integral sei $f_{m-1} = a_{m-1}$; im zweiten Falle hat man noch für $\frac{d\psi}{dq_{m-3}}$ wieder ψ'_{m-3} einzusetzen; a_{m-1} bedeutet eine willkürliche Konstante. Nach Auffindung der Funktion f_{m-1} ist die ganze Aufgabe erledigt. Entnimmt man nämlich aus den Gleichungen

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots, \quad f_{m-1} = a_{m-1}$$

und aus der vorgelegten partiellen Differentialgleichung die Ausdrücke von $p_1, \ldots, p_m$ durch $q_1, \ldots, q_m$, so wird

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

ein vollständiges Differential und

$$V = \int \{p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m\}$$

ein Integral der vorgelegten partiellen Differentialgleichung, das außer der additiven willkürlichen Konstanten noch die $m - 1$ weiteren willkürlichen Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ enthält.

Führt man ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf eine Gleichung in zwei Veränderlichen zurück, so werde die Ordnung des Systems nach der Ordnung dieser Differentialgleichung geschätzt oder nach der Zahl der willkürlichen Konstanten, die ihre vollständige Integration mit sich bringt. Wenn nun die Hilfsdifferentialgleichungen alle bis zur höchsten Ordnung aufsteigen, die sie erreichen können, so ist nach der oben dargelegten Methode für $\frac{m(m-1)}{2}$ Differentialgleichungen in zwei Veränderlichen jedesmal ein beliebiges Integral aufzusuchen, und zwar für

eine	von	$(2m-2)$-ter	Ordnung,
zwei	»	$(2m-4)$-ter	»
drei	»	$(2m-6)$-ter	»
. . .	. . .	. . .	. . .
$m-1$	»	2-ter	»

Die Ordnung der Hilfsgleichungen fällt aber meistens viel niedriger aus. Deshalb wird man genauer so sagen: Für $m - 1$ Systeme, die nacheinander aufgestellt werden und bezüglich von $(2m-2)$-ter, $(2m-4)$-ter, ..., 2-ter Ordnung sind, ist jedesmal ein beliebiges Integral zu suchen; außerdem sind für das einzelne System $(2m-2i)$-ter Ordnung nacheinander $i - 1$ Hilfsgleichungen zu bilden, die die Ordnung $2m - 2i$ nicht überschreiten, meistens von viel niedrigerer Ordnung sind, und für die jedesmal ein Integral zu ermitteln ist. Die bisher bekannten Methoden forderten die vollständige Integration des Systems $(2m-2)$-ter Ordnung, was nach Auffindung eines Integrals auf die vollständige Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung $(2m-3)$-ter Ordnung in zwei Veränderlichen hinauskommt. Die Analysten pflegten zu sagen, sie hätten eine Differentialgleichung integriert, wenn sie sie auf die Integration von Gleichungen niedrigerer Ordnung zurückgeführt hatten. In diesem Sinne ist jene Gleichung von

$(2m - 3)$-ter Ordnung durch die von mir oben angegebenen Methoden allgemein integriert; denn sie ist auf Gleichungen $(2m - 4)$-ter Ordnung und niedrigerer Ordnungen zurückgeführt.

Über den Beweis des Theorems IV in § 18, auf welches das Obige sich stützt. Über die Vertauschung der Differentialoperationen.

§ 23. Es bleibt noch das Theorem IV zu beweisen, auf das die ganze obige Betrachtung sich stützt. Um diesen Beweis zu liefern, werde ich etwas weiter ausholen.[8])

Es sei f eine Funktion von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, und man schreibe die beiden Ausdrücke auf:

$$A(f) = A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$B(f) = B_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + B_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

in denen $A_1, A_2, \ldots$ und $B_1, B_2, \ldots$ beliebige gegebene Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind. $A(f)$ und $B(f)$ sind rein symbolische Bezeichnungen, sie bezeichnen die Ausdrücke, die nach gewissen mit der Funktion f vorgenommenen Operationen sich ergeben; ich werde diese Operationen die erste und die zweite nennen. Wir wollen den Ausdruck $B(f)$ der ersten Operation, den Ausdruck $A(f)$ der zweiten Operation unterwerfen und die daraus entstehenden Ausdrücke voneinander abziehen. Ich behaupte, daß der Ausdruck

$$A(B(f)) - B(A(f))$$

die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f nicht enthält, sondern sich auf die Form

$$C(f) = C_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + C_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + C_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

reduziert. In dem entwickelten Ausdruck $A(B(f))$ ist nämlich $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ mit $A_i B_i$ multipliziert und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$, wenn i und k ungleich sind, mit $A_i B_k + A_k B_i$. Da aber der andere Ausdruck aus diesem entsteht, indem man die A und die B vertauscht, wobei jene Koeffizienten sich nicht ändern, so ist klar, daß

aus der Differenz der beiden Ausdrücke jene Glieder überhaupt herausfallen. Es ergibt sich ferner in der gefundenen Gleichung

$$A(B(f)) - B(A(f)) = C(f)$$

das allgemeine Glied

$$\begin{aligned} C_i = \quad & A_1 \frac{\partial B_i}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial B_i}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial B_i}{\partial x_n} \\ & - B_1 \frac{\partial A_i}{\partial x_1} - B_2 \frac{\partial A_i}{\partial x_2} - \cdots - B_n \frac{\partial A_i}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

Allgemein werde gesetzt

$$A^i(f) = A(A^{i-1}(f)),$$

so daß

$$A^2(f) = A(A(f)),$$
$$A^3(f) = A(A^2(f)),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

ist; ebenso sei allgemein

$$B^i(f) = B(B^{i-1}(f)),$$

ferner

$$B^k A^i(f) = B^k(A^i(f)),$$
$$A^l B^k A^i(f) = A^l(B^k A^i(f)),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

so daß man z. B. den Ausdruck

$$B^m A^l B^k A^i(f)$$

erhält, indem man die Funktion f i-mal nacheinander der ersten Operation unterwirft, den entstehenden Ausdruck k-mal nacheinander der zweiten Operation, den entstehenden Ausdruck wieder l-mal nacheinander der ersten Operation, den entstehenden Ausdruck wieder m-mal nacheinander der zweiten Operation. Dies festgesetzt, wollen wir annehmen, daß der Ausdruck

$$\begin{aligned} C_i = \quad & A_1 \frac{\partial B_i}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial B_i}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial B_i}{\partial x_n} \\ & - B_1 \frac{\partial A_i}{\partial x_1} - B_2 \frac{\partial A_i}{\partial x_2} - \cdots - B_n \frac{\partial A_i}{\partial x_n} \end{aligned}$$

für jeden Wert von i identisch verschwindet. Dann wird, was auch die Funktion f sein mag, identisch

$$AB(f) = BA(f)$$

sein, d. h. die Reihenfolge der beiden Operationen darf umgekehrt werden. Daraus läßt sich der allgemeine Satz ableiten, daß der Ausdruck

$$B^m A^l B^k A^i(f)$$

derselbe bleibt, welches auch die Reihenfolge der Operationen sein mag.

Um den vorstehenden allgemeinen Satz zu beweisen, bemerke ich, daß

$$\begin{aligned} B^k A(f) &= B^{k-1} BA(f) &&= B^{k-1} AB(f) \\ &= B^{k-2} BAB(f) &&= B^{k-2} AB^2(f) \\ &= B^{k-3} BAB^2(f) &&= B^{k-3} AB^3(f) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= BAB^{k-1}(f) &&= AB^k(f) \end{aligned}$$

ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} B^k A^i(f) &= B^k AA^{i-1}(f) &&= AB^k AA^{i-2}(f) \\ &= AAB^k A^{i-2}(f) &&= A^2 B^k AA^{i-3}(f) \\ &= A^2 AB^k A^{i-3}(f) &&= A^3 B^k AA^{i-4}(f) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= A^{i-1} AB^k(f) &&= A^i B^k(f). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$A^l B^k A^i(f) = A^l A^i B^k(f) = A^{i+l} B^k(f) = B^k A^{i+l}(f),$$

$$B^m A^l B^k A^i(f) = B^m B^k A^{i+l}(f) = B^{m+k} A^{i+l}(f) = A^{i+l} B^{m+k}(f).$$

Damit ist der zu beweisende Satz klargelegt.

Die im vorigen Paragraphen gefundene Formel wird auf anderem Wege bestätigt.

§ 24. Der gefundene Satz, wonach

$$A(B(f)) = B(A(f))$$

ist, wenn für alle Werte des Index $C_i = 0$ ist, läßt sich durch folgende Betrachtungen bestätigen. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Funktionen von zwei Veränderlichen t und u, die weder in f, noch in den A_i, B_i explizite vorkommen. Wir wollen annehmen, daß diese Funktionen durch die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = A_1, & \dfrac{\partial x_2}{\partial t} = A_2, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial x_n}{\partial t} = A_n, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = B_1, & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} = B_2, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial x_n}{\partial u} = B_n \end{cases}$$

bestimmt werden. Damit diese Gleichungen stattfinden können, muß für jeden Wert von i

$$(2)\qquad \frac{\partial B_i}{\partial t} - \frac{\partial A_i}{\partial u} = C_i = 0$$

sein. Es folgt aber aus (1):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A(f), \quad \frac{\partial f}{\partial u} = B(f)$$

und daraus

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)}{\partial u} = BA(f), \quad \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial t} = AB(f).$$

Diese Ausdrücke sind, da man die Differentiationen nach t und nach u vertauschen darf, einander gleich. Das ist aber das angegebene Theorem.

Über die Anwendung der gefundenen Formel bei der Integration linearer partieller Differentialgleichungen.

§ 25. Im obigen war f eine beliebige Funktion. Nehmen wir nunmehr an, f sei ein Integral der Gleichung

$$(1)\qquad 0 = A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n},$$

d. h., f sei eine Funktion von der Beschaffenheit, daß man identisch hat

$$A(f) = 0.$$

Sind nun wieder $B_1, B_2, \ldots, B_n$ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und so beschaffen, daß für jeden Wert von i identisch

$$0 = C_i = A_1 \frac{\partial B_i}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial B_i}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial B_i}{\partial x_n}$$
$$- B_1 \frac{\partial A_i}{\partial x_1} - B_2 \frac{\partial A_i}{\partial x_2} - \cdots - B_n \frac{\partial A_i}{\partial x_n}$$

ist, so folgt aus dem bewiesenen Satze, daß auch die Funktion

$$B(f) = B_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + B_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

oder allgemeiner $B^m(f)$ ein Integral der Gleichung (1) ist. Damit das der Fall sei, muß nämlich identisch

$$AB^m(f) = 0$$

sein. Da aber die Größen C_i gleich Null sind, so wird identisch

$$AB^m(f) = B^m A(f),$$

und dieser Ausdruck verschwindet identisch, da nach der Voraussetzung der Ausdruck $A(f)$ identisch verschwindet.

Es kann vorkommen, daß der Ausdruck $B(f)$ selbst identisch verschwindet oder einer Konstanten gleich wird. Wenn das aber nicht der Fall ist, so kann, wenn die $B_1, B_2, \ldots, B_n$ und irgend ein Integral $\varphi = f$ der Gleichung (1) bekannt sind, ein zweites $\varphi = B(f)$ abgeleitet werden, aus diesem, indem man an die Stelle des alten das neue Integral setzt, ein drittes $\varphi = B^2(f)$ und so fort. Da aber feststeht, daß die Gleichung (1) nicht mehr als $n-1$ voneinander unabhängige Integrale besitzt, so haben wir den folgenden Satz:

Wenn für jeden Wert von i

$$0 = A_1 \frac{\partial B_i}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial B_i}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial B_i}{\partial x_n}$$
$$- B_1 \frac{\partial A_i}{\partial x_1} - B_2 \frac{\partial A_i}{\partial x_2} - \cdots - B_n \frac{\partial A_i}{\partial x_n}$$

ist, und man hat

$$0 = A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = A(f),$$

also gibt es zwischen den Funktionen

$$f,\ B(f),\ B^2(f),\ \ldots,\ B^{n-1}(f)$$

eine oder mehrere Gleichungen, in die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nicht eingehen.

Anwendung des Obigen auf die Gleichungen des vorliegenden Problems. Allgemeines Theorem über die Ausdrücke $[\varphi, \psi]$.

§ 26. Wir werden jetzt den $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ gewisse spezielle Werte beilegen, die bewirken, daß alle Ausdrücke C_i partielle Ableitungen einer und derselben Funktion werden. Wenn wir dann dartun, daß diese Funktion verschwindet, so verschwinden auch die C_i für alle Werte von i, was die geforderte Bedingung ist. Zu Anfang aber will ich einen allgemeineren Satz aufstellen. Ich setze zu dem Zweck $n = 2m$ und führe statt der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ das Doppelsystem von Veränderlichen ein:

$$q_1, q_2, \ldots, q_m,$$
$$p_1, p_2, \ldots, p_m.$$

Ferner nehme ich an:

$$A(f) = A_1^0 \frac{\partial f}{\partial q_1} + A_2^0 \frac{\partial f}{\partial q_2} + \cdots + A_m^0 \frac{\partial f}{\partial q_m}$$
$$+ A_1^1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + A_2^1 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + A_m^1 \frac{\partial f}{\partial q_m},$$
$$B(f) = B_1^0 \frac{\partial f}{\partial q_1} + B_2^0 \frac{\partial f}{\partial q_2} + \cdots + B_m^0 \frac{\partial f}{\partial q_m}$$
$$+ B_1^1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + B_2^1 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + B_m^1 \frac{\partial f}{\partial p_m}.$$

Endlich sei:

$$AB(f) - BA(f) = C(f)$$
$$= C_1^0 \frac{\partial f}{\partial q_1} + C_2^0 \frac{\partial f}{\partial q_2} + \cdots + C_m^0 \frac{\partial f}{\partial q_m}$$
$$+ C_1^1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + C_2^1 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + C_m^1 \frac{\partial f}{\partial p_m}.$$

Dies festgesetzt wird

$$C_i^0 = \sum_k \left\{ A_k^0 \frac{\partial B_i^0}{\partial q_k} + A_k^1 \frac{\partial B_i^0}{\partial p_k} - B_k^0 \frac{\partial A_i^0}{\partial q_k} - B_k^1 \frac{\partial A_i^0}{\partial p_k} \right\},$$
$$C_i^1 = \sum_k \left\{ A_k^0 \frac{\partial B_i^1}{\partial q_k} + A_k^1 \frac{\partial B_i^1}{\partial p_k} - B_k^0 \frac{\partial A_i^1}{\partial q_k} - B_k^1 \frac{\partial A_i^1}{\partial p_k} \right\},$$

wobei dem k hinter dem Zeichen Σ die Werte 1, 2, ..., m beizulegen sind. Damit nun die Ausdrücke hinter dem Zeichen Σ partielle Ableitungen eines und desselben Ausdrucks werden, nehme ich an:

$$A_k^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}, \quad A_k^1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_k},$$

$$B_k^0 = \frac{\partial \psi}{\partial p_k}, \quad B_k^1 = -\frac{\partial \psi}{\partial q_k}.$$

Daraus folgt:

$$A_k^0 \frac{\partial B_i^0}{\partial q_k} - B_k^1 \frac{\partial A_i^0}{\partial p_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial p_i \partial q_k} + \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial p_k} = \frac{\partial \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_k} \dfrac{\partial \psi}{\partial q_k}}{\partial p_i}.$$

Durch Vertauschung von A und B, φ und ψ ergibt sich:

$$B_k^0 \frac{\partial A_i^0}{\partial q_k} - A_k^1 \frac{\partial B_i^0}{\partial p_k} = \frac{\partial \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_k} \dfrac{\partial \psi}{\partial p_k}}{\partial p_i},$$

mithin

$$C_i^0 = -\frac{\partial \sum_k \left\{ \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_k} \dfrac{\partial \psi}{\partial p_k} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_k} \dfrac{\partial \psi}{\partial q_k} \right\}}{\partial p_i}.$$

Vertauscht man p und q, wobei sich zugleich A^0 und $-A^1$, B^0 und $-B^1$ vertauschen, so verwandelt sich C_i^0 in C_i^1. Die obige Formel liefert daher, wenn man p und q vertauscht,

$$C_i^1 = \frac{\partial \sum_k \left\{ \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_k} \dfrac{\partial \psi}{\partial p_k} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_k} \dfrac{\partial \psi}{\partial q_k} \right\}}{\partial q_i}.$$

Ich werde im folgenden mit $[f, \varphi]$ den Ausdruck

$$[f, \varphi] = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_m} \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - \frac{\partial f}{\partial p_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial f}{\partial p_m} \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}$$

bezeichnen, so daß

$$[f, f] = 0, \quad [f, \varphi] = -[\varphi, f]$$

sein wird.[9]) Nach Einführung dieser Bezeichnungsweise wird für die den A_i^0, A_i^1, B_i^0, B_i^1 beigelegten Werte sein

$$\begin{aligned} A(f) &= [f,\ \varphi], \\ B(f) &= [f,\ \psi], \\ AB(f) &= [[f,\ \psi],\ \varphi], \\ BA(f) &= [[f,\ \varphi],\ \psi]. \end{aligned}$$

Ferner wird

$$C_i^0 = -\frac{\partial[\varphi,\ \psi]}{\partial p_i}, \quad C_i^1 = \frac{\partial[\varphi,\ \psi]}{\partial q_i}.$$

Setzt man diese Werte ein, so kommt

$$C(f) = [[\varphi,\ \psi],\ f].$$

Die oben gefundene Formel

$$AB(f) - BA(f) = C(f)$$

geht also schließlich in folgende über

$$[[f,\ \psi],\ \varphi] - [[f,\ \varphi],\ \psi] = [[\varphi,\ \psi],\ f].$$

Man kann sie besser so schreiben

$$[[f,\ \varphi],\ \psi] + [[\varphi,\ \psi],\ f] + [[\psi,\ f],\ \varphi] = 0$$

und hat damit das

Theorem V.

Es werde allgemein, was für Funktionen auch R und S von $q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m$ sein mögen, durch $[R,\ S]$ der folgende Ausdruck bezeichnet

$$\begin{aligned} [R,\ S] = &\frac{\partial R}{\partial q_1}\frac{\partial S}{\partial p_1} + \frac{\partial R}{\partial q_2}\frac{\partial S}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m}\frac{\partial S}{\partial p_m} \\ &- \frac{\partial R}{\partial p_1}\frac{\partial S}{\partial q_1} - \frac{\partial R}{\partial p_2}\frac{\partial S}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial R}{\partial p_m}\frac{\partial S}{\partial q_m}. \end{aligned}$$

Setzt man dann

$$[\varphi,\ \psi] = F, \quad [\psi,\ f] = \Phi, \quad [f,\ \varphi] = \Psi,$$

so ist identisch

$$[F,\ f] + [\Phi,\ \varphi] + [\Psi,\ \psi] = 0.$$

Das ist ein sehr wichtiges Theorem.

Über das der Gleichung $[f, \varphi] = 0$ entsprechende System gewöhnlicher Differentialgleichungen und die Auffindung eines dritten Integrals aus irgend zweien.

§ 27. Wenn f eine gegebene Funktion ist, so wird

$$[f, \varphi] = 0$$

eine partielle Differentialgleichung sein, der die Funktion φ genügen muß. Es ist bekannt, daß man alle der Gleichung

$$(1)\quad \begin{cases} 0 = [f, \varphi] = \dfrac{\partial f}{\partial q_1}\dfrac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \dfrac{\partial f}{\partial q_2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial q_m}\dfrac{\partial \varphi}{\partial p_m} \\ \qquad - \dfrac{\partial f}{\partial p_1}\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_1} - \dfrac{\partial f}{\partial p_2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_2} - \cdots - \dfrac{\partial f}{\partial p_m}\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_m} \end{cases}$$

genügenden Funktionen erhält, indem man die Integrale des folgenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen sucht:

$$(2)\quad \begin{cases} dp_1 : dp_2 : \cdots : dp_m : \quad dq_1 : \quad dq_2 : \cdots : \quad dq_m \\ = \dfrac{\partial f}{\partial q_1} : \dfrac{\partial f}{\partial q_2} : \cdots : \dfrac{\partial f}{\partial q_m} : -\dfrac{\partial f}{\partial p_1} : -\dfrac{\partial f}{\partial p_2} : \cdots : -\dfrac{\partial f}{\partial p_m}. \end{cases}$$

So oft nämlich $\varphi =$ Konst. irgend ein Integral dieses Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ist, wird φ eine der Gleichung (1) genügende Funktion sein. Es sei nun $\psi =$ Konst. irgend ein anderes Integral der Gleichungen (2). Dann wird identisch sein

$$[f, \varphi] = 0, \quad [f, \psi] = 0$$

oder, wenn wir wieder die im vorigen Paragraphen benutzten Bezeichnungen anwenden,

$$\Psi = 0, \quad \Phi = 0.$$

In diesem Falle geht aber die in Theorem V angegebene Identität über in

$$[f, F] = 0.$$

Daraus folgt, daß auch

$$F = [\varphi, \psi] = \text{Konst.}$$

ein Integral der Gleichungen (2) ist, und damit hat man das

Theorem VI.

Es seien

$$\varphi = \text{Konst.}, \quad \psi = \text{Konst.}$$

zwei beliebige Integrale der Gleichungen

$$dp_1 : dp_2 : \cdots : dp_n : \quad dq_1 : \quad dq_2 : \cdots : \quad dq_n$$
$$= \frac{\partial f}{\partial q_1} : \frac{\partial f}{\partial q_2} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial q_n} : -\frac{\partial f}{\partial p_1} : -\frac{\partial f}{\partial p_2} : \cdots : -\frac{\partial f}{\partial p_n}.$$

Dann ist die Gleichung

$$\text{Konst.} = [\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial \psi}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial \psi}{\partial q_m}$$

ein drittes Integral desselben Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.[10])

Erläuternde Bemerkungen über das im vorigen Paragraphen angegebene Theorem.

§ 28. Im obigen kann es vorkommen, daß die Funktion $[\varphi, \psi]$ in eine konstante Größe oder allgemeiner in eine Funktion von φ und ψ übergeht. In diesem Falle läßt sich aus den beiden gefundenen Integralen nicht mehr in der Weise, wie ich in dem vorstehenden Theorem angegeben habe, ein drittes herleiten. Ich bemerke jedoch, daß diese Fälle nur als Ausnahmefälle zu betrachten sind. Im allgemeinen müssen wir sagen, daß aus zwei Integralen der Gleichungen

$$dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_m : \quad dp_1 : \quad dp_2 : \cdots : \quad dp_m$$
$$= \frac{\partial U}{\partial p_1} : \frac{\partial U}{\partial p_2} : \cdots : \frac{\partial U}{\partial p_m} : -\frac{\partial U}{\partial q_1} : -\frac{\partial U}{\partial q_2} : \cdots : -\frac{\partial U}{\partial q_m}$$

durch bloße Differentiationen ein drittes abgeleitet werden kann, aus diesem, indem man es mit den beiden vorhandenen kombiniert, ein viertes und fünftes usw., so daß aus den beiden gegebenen Integralen durch bloße Ausführung partieller Differentiationen alle Integrale des vorgelegten Systems gewöhnlicher

Differentialgleichungen abgeleitet werden. Wenn nämlich die $2m - 1$ Integrale der vorgelegten Gleichungen

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \ldots, u_{2m-1} = a_{2m-1}$$

lauten, wobei $a_1, a_2, \ldots, a_{2m-1}$ willkürliche Konstanten sind, die in die Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_{2m-1}$ nicht eingehen, so ist der allgemeine Ausdruck zweier Integrale:

$$\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_{2m-1}) = \text{Konst.},$$
$$\Theta_1(u_1, u_2, \ldots, u_{2m-1}) = \text{Konst.}$$

Wenn nun den Funktionen Θ, Θ_1 nicht gewisse besondere Formen zugestanden werden, so wird es immer so sein, daß sich aus diesen beiden Integralen

$$\Theta = \text{Konst.}, \quad \Theta_1 = \text{Konst.}$$

durch wiederholte Anwendung des in dem obigen Theorem angegebenen Verfahrens alle Integrale ergeben. Es lassen sich sogar immer auf unendlich viele Weisen zwei solche Integrale $\Theta = \text{Konst.}$, $\Theta_1 = \text{Konst.}$ angeben, aus denen durch die angegebenen Operationen alle übrigen abgeleitet werden bönnen. Das ist von um so größerer Bedeutung, als das vorliegende System gewöhnlicher Differentialgleichungen gerade so aussieht wie das System, dessen Integration die Bewegung einer Anzahl materieller Punkte liefert, die von irgendwelchen Anziehungs- oder Abstoßungskräften bewegt werden und außerdem irgendwelchen Bedingungen unterworfen sind. Ich bin zu den obigen Theoremen V und VI mit einer gewissen Notwendigkeit gelangt, sobald ich nachforschte, an welcher Eigentümlichkeit im Bau der Gleichungen (α) in § 11 es liegt, daß man ihnen allen durch eine und dieselbe Funktion genügen kann. Daß dies nämlich möglich sei, stand fest; es war zur Genüge bekannt, daß es eine Funktion V gibt, die der vorgelegten Gleichung genügt und $m - 1$ willkürliche Konstanten enthält; hiernach war also auch klar, daß sich außer der vorgelegten Gleichung $m - 1$ andere Gleichungen zwischen den Größen $q_1, \ldots, q_m$, $p_1, \ldots, p_m$ finden lassen müssen, die ebensoviele willkürliche Konstanten enthalten. Hieraus wieder kann man schließen, daß es immer eine Funktion p_{i+1} gibt, die den sämtlichen Gleichungen (α) genügt, und daß sie eine willkürliche Konstante enthalten kann. Als ich nun aber bei der Erforschung der Bedingungen für die Möglichkeit einer solchen simultanen

Integration zu dem fundamentalen Theorem VI gelangt war, habe ich dieses Theorem, offen gestanden, eine Zeitlang für eine vollkommene neue Entdeckung gehalten. Denn was kann man sich Wunderbareres und fast den Glauben Übersteigendes denken, als die aus ihm sich ergebende Folgerung, die wir bald kennen lernen werden, daß man bei allen mechanischen Problemen, bei denen die Erhaltung der lebendigen Kräfte gilt, im allgemeinen aus zwei außer jenem Prinzip gefundenen Integralen ohne jede weitere Integration alle übrigen finden kann? Wie sollte man dazu kommen, dieses Theorem für bekannt zu halten, da es in keinem Lehrbuch der Mechanik, in keinem Lehrbuch der Analysis, in dem die Integration der Differentialgleichungen behandelt wird, zu finden ist, während es doch überall als höchste Errungenschaft der Integralrechnung hervorgehoben werden müßte. Trotzdem ist diese Entdeckung — ich möchte fast sagen, ohne Wissen des Entdeckers — vor neunundzwanzig*) Jahren von dem berühmten *Poisson* gemacht worden.[11]) Sie ist nämlich geradezu identisch mit einem Satze, der sich auf seine Störungsformeln bezieht, die die Differentiale der gestörten Elemente durch die partiellen Differentiale der Störungsfunktion nach den Elementen linear ausdrücken. Nach diesem Satze sind die bei den partiellen Differentialen der Störungsfunktion auftretenden Koeffizienten, für die von dem berühmten Manne dasselbe Bildungsgesetz wie das der Ausdrücke $[\varphi, \psi]$ gefunden worden ist, von der Zeit t frei, d. h. Funktionen der Elemente allein. Der Satz wurde kaum für neu und bemerkenswert gehalten; denn die *Lagrange*schen und *Poisson*schen Störungsformeln sind die Umkehrungen voneinander, und *Lagrange* hatte bei seinen Formeln die Unabhängigkeit der Koeffizienten von der Zeit schon bewiesen, so daß die Sache bei den *Poisson*schen Formeln von selbst klar war, und die Mathematiker nichts besonders Wunderbares darin sahen. Man ging nämlich nur auf die Bildung der Differentiale der gestörten Elemente aus, und da man die *Lagrange*schen

---

*) Die zitierte Abhandlung kam heraus im Dezember 1809; daraus ist zu schließen, daß die vorliegende Abhandlung gegen Ende des Jahres 1838 geschrieben ist. Das stimmt auch damit zusammen, daß gewisse in dieser Abhandlung mitgeteilte Formeln in einer am 21. November 1838 der Berliner Akademie der Wissenschaften mitgeteilten Note erwähnt werden. Vgl. Ende § 70.
Clebsch.

Formeln zu diesem Zwecke für bequemer hielt, so wurden die *Poisson*schen Formeln und jener staunenswerte Satz nur deshalb gelegentlich zitiert, weil man die Schwierigkeit des Beweises merkwürdig fand. Keiner hat es, soviel ich weiß, unternommen, jenen Satz an und für sich zu untersuchen, ohne Rücksicht auf die Störungstheorie. Hätte dies jemand getan, so konnte es ihm nicht entgehen, wie große Bedeutung der Satz bei Behandlung des ungestörten Problems hat, und daß er der wichtigste Satz der ganzen analytischen Mechanik ist, für den es in der ganzen Integralrechnung kein Analogon gibt. Der große *Lagrange* erwähnt in seiner analytischen Mechanik (Bd. II, Abschnitt VIII, Art. 6), daß in den *Poisson*schen Störungsformeln die Koeffizienten der Differentiale der Störungsfunktion von der Zeit unabhängig sind, und fügt hinzu: »Aber der direkte Beweis dieser merkwürdigen Eigenschaft wird äußerst schwierig, wie man in der schönen Abhandlung *Poisson*s in Band VIII des Journal de l'École polytechnique sehen kann, und vielleicht wäre niemals einer auf den Gedanken gekommen, danach zu suchen, wenn nicht vorher die Richtigkeit des Theorems festgestanden hätte.« [12]) Wir sehen, daß nicht einmal ein so großer Meister es geahnt hat, was eigentlich das Merkwürdige an dem Theorem ist. Wir haben hier ein ausgezeichnetes Beispiel, wie wir, wenn die Probleme nicht in unserem Geiste vorgebildet sind, unter Umständen die wichtigsten Entdeckungen, mögen sie uns auch direkt vor den Augen liegen, nicht sehen. Der berühmte *Poisson* hatte aus je zwei Integralen durch partielle Differentiationen die Koeffizienten der Formeln gebildet, durch die die Differentiale der gestörten Elemente ausgedrückt werden, und hatte gezeigt, daß sie von der Zeit unabhängig sind. Da aber die Mathematiker ihren Geist ganz auf die Störungsformeln gerichtet hatten, so wurde an dieser Entdeckung nur das als bemerkenswert angesehen, daß die Koeffizienten der Störungsformeln von der Zeit nicht abhängen, und man beachtete nicht die viel wunderbarere Tatsache, daß sich aus je zwei Integralen durch partielle Differentiationen ein dritter Ausdruck bilden läßt, der von der Zeit nicht abhängt. Und doch ist ein derartiger Ausdruck im allgemeinen ein drittes Integral. Man glaubte, der Satz bringe nichts über die *Lagrange*schen Entdeckungen Hinausgehendes; denn der *Lagrange*sche Satz, der als gleichwertig betrachtet wurde, hat bei dem ungestörten Problem keinen Nutzen, außer daß man, wie der Autor nach einer solchen Anwendung suchend

selbst angedeutet hat, mit Hilfe des Satzes prüfen kann, ob die für die Koordinaten gefundenen Ausdrücke durch die Elemente und die Zeit richtig sind. Dagegen ist der Satz, zu dem der berühmte *Poisson* bei der direkten Aufsuchung der Differentiale der gestörten Elemente gelangte, bei der Ermittelung der Integrale des ungestörten Problems von der größten Wichtigkeit. Man kann auf ihm als Fundament eine ganz neue Integrationstheorie der mechanischen Probleme errichten, bei denen das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte gilt, und allgemeiner aller Probleme, die auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden können, wozu, wie sich zeigen läßt, auch die allgemeinsten isoperimetrischen Probleme gehören. Fast die ganze hier vorliegende Abhandlung stützt sich auf jenes Fundament und beschäftigt sich hauptsächlich mit der Erforschung der Eigenschaften der Ausdrücke $[\varphi, \psi]$, die ein drittes Integral gebildet aus zwei vorhandenen oder die Koeffizienten der von *Poisson* angegebenen Störungsformeln liefern. Trotzdem glaube ich, daß sie noch lange nicht alles erschöpft, was aus dieser Quelle für die Integration der dynamischen Differentialgleichungen sich gewinnen läßt. Es wartet vielmehr noch sehr viel Wichtiges auf spätere Forschungen.[13])

Da es in allen Fällen nützlich und auch nicht unelegant ist, alle Sätze auf reine Identitäten zurückzuführen, so habe ich das Theorem VI als Folgerung aus der neuen und äußerst einfachen Identität abgeleitet, die ich in Theorem V angegeben habe, und die auch bei anderen Fragen von Nutzen sein kann. Wir kehren jetzt zu unserer Aufgabe zurück.

Beweis des Theorems IV.

§ 29. Aus Theorem VI wollen wir das zu beweisende Theorem IV ableiten, auf das sich unsere neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in beliebig vielen Veränderlichen stützte.

Das Theorem VI lehrt folgendes. Wenn identisch

$$[f, \varphi] = 0, \quad [f, \psi] = 0$$

ist, so ist auch identisch

$$[f, [\varphi, \psi]] = 0.$$

Daraus folgt durch Vertauschung von φ und f: Wenn identisch

$$[\varphi, f] = 0, \quad [\varphi, \psi] = 0$$

ist, so ist auch identisch

$$[\varphi, [f, \psi]] = 0.$$

Wir wollen mit $\varkappa$, λ zwei beliebige, voneinander verschiedene unter den Zahlen $1, 2, \ldots, i$ verstehen und annehmen, daß die Funktionen f, φ, ψ von den Veränderlichen $q_1, \ldots, q_i$, $p_1, \ldots, p_i$ nur die beiden $q_\varkappa$, q_λ enthalten, und daß außerdem mit der Funktion φ noch das Glied $-p_\varkappa$, mit der Funktion ψ das Glied $-p_\lambda$ additiv verbunden sei, so daß

$$\frac{\partial f}{\partial p_\varkappa} = \frac{\partial f}{\partial p_\lambda} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_\lambda} = \frac{\partial \psi}{\partial p_\varkappa} = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_\varkappa} = \frac{\partial \psi}{\partial p_\lambda} = -1$$

ist. Es wird somit

$$(1) \quad \begin{cases} [\varphi, f] = \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_m} \dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial f}{\partial q_\varkappa} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_m} \dfrac{\partial f}{\partial q_m}, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} [\psi, f] = \dfrac{\partial \psi}{\partial q_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \dfrac{\partial \psi}{\partial q_m} \dfrac{\partial f}{\partial p_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial f}{\partial q_\lambda} - \dfrac{\partial \psi}{\partial p_{i+1}} \dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \dfrac{\partial \psi}{\partial p_m} \dfrac{\partial f}{\partial q_m}, \end{cases}$$

ferner

$$(3) \quad \begin{cases} [\varphi, \psi] = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_\lambda} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_{i+1}} \dfrac{\partial \psi}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_m} \dfrac{\partial \psi}{\partial p_m} \\ \qquad + \dfrac{\partial \psi}{\partial q_\varkappa} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_{i+1}} \dfrac{\partial \psi}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_m} \dfrac{\partial \psi}{\partial q_m}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte von

$$[\varphi, f], \quad [\psi, f], \quad [\varphi, \psi]$$

ein, so lehrt das obige Theorem folgendes. Wenn φ und ψ solche Funktionen von $q_\varkappa, q_\lambda, q_{i+1}, \ldots, q_m, p_{i+1}, \ldots, p_m$ bezeichnen, die der Gleichung

$$0 = -\frac{\partial\varphi}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial\psi}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m}$$
$$+ \frac{\partial\psi}{\partial q_\varkappa} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial\psi}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m}$$

genügen, dann wird, sobald $F = f$ ein Integral der Gleichung

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial F}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial F}{\partial p_m}$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial q_\varkappa} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial F}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial F}{\partial q_m}$$

ist, der Ausdruck

$$F = \frac{\partial\psi}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m}$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial\psi}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial\psi}{\partial p_m}\frac{\partial f}{\partial q_m}$$

ein zweites Integral derselben Gleichung sein. Das ist das Theorem IV: man braucht nur statt φ und ψ zu schreiben $p_\varkappa$ und p_λ und φ statt F. Damit ist das, was noch zu beweisen übrig war, bewiesen.

Da das Obige auf der vierten Form der Integrabilitätsbedingungen beruht, wird jetzt, damit das Problem auf verschiedene Weisen begründet wird, zu der ersten Form zurückgekehrt.

§ 30. Ich will zu der auseinandergesetzten Integrationsmethode noch Erläuterungen geben.

Es sei $f = a$, unter a eine Konstante verstanden, die vorgelegte partielle Differentialgleichung. Durch die auseinandergesetzte Methode sind Gleichungen

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots, \quad f_{m-1} = a_{m-1}$$

gefunden worden, aus denen, mit der vorgelegten vereinigt, $p_1, \ldots, p_m$ als Funktionen von $q_1, \ldots, q_m$ zu bestimmen waren. Und zwar war

f	eine Funktion von	$p_1, p_2, p_3, \ldots,$		$p_m, q_1, \ldots, q_m,$
f_1	» » »	$a, p_2, p_3, \ldots,$		$p_m, q_1, \ldots, q_m,$
f_2	» » »	$a, a_1, p_3, \ldots,$		$p_m, q_1, \ldots, q_m,$
. . .	. . .	. . .		. . .
f_{m-1}	» » »	$a, a_1, a_2, \ldots,$		$a_{m-2}, p_m, q_1, \ldots, q_m.$

Die Größen $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ sind willkürliche Konstanten, a ist eine gegebene Konstante, die man der Null gleichsetzen darf, die ich aber der Gleichförmigkeit halber beibehalte. Wurden auf Grund der Gleichungen

$$f = a, \quad f_1 = a_1, \; \ldots, \; f_{i-1} = a_{i-1}$$

$p_1, p_2, \ldots, p_i$ durch $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ bestimmt, so genügte die Funktion f_i den i Gleichungen (d) des § 17 identisch und daher auch die auf Grund der Gleichung $f_i = a_i$ durch $p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ ausgedrückte Funktion p_{i+1} den i Gleichungen (α) des § 11. Werden dagegen mit Hilfe der Gleichungen

$$f = a, \quad f_1 = a_1, \; \ldots, \; f_{i-1} = a_{i-1}$$

nicht $p_1, p_2, \ldots, p_i$ durch die übrigen Größen $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ dargestellt, sondern wie es in Theorem I, § 6, geschehen ist, von den i ersten unter den Größen $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ jede durch die folgenden, so daß auf Grund von $f = a$ das p_1 durch $p_2, p_3, \ldots$, auf Grund von $f_1 = a_1$ das p_2 durch $p_3, p_4, \ldots$, auf Grund von $f_2 = a_2$ das p_3 durch $p_4, p_5, \ldots$ ausgedrückt wird, dann sind die i Gleichungen (α), wie wir am Anfang dieser Abhandlung gesehen haben, gleichbedeutend mit den folgenden i Gleichungen:

$$\text{(a)} \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = &- \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\ &+ \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}, \\ 0 = &- \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_3} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\ &+ \frac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_2}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = &- \frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_m} \\ &+ \frac{\partial p_i}{\partial q_{i+1}} - \frac{\partial p_i}{\partial q_{i+2}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}} - \cdots - \frac{\partial p_i}{\partial q_m}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_m}. \end{aligned} \right.$$

Das sind die in Theorem I angegebenen Gleichungen (a): man hat nur in jenem Theorem zu setzen $k = i + 1$ und für i sukzessiv die Zahlen 1, 2, ..., i zu schreiben. Aus diesen Gleichungen (a) sind oben die Gleichungen (α) abgeleitet worden.

Nach Einführung der Funktionen f, die bei der Lösung des Problems einzeln gleich Konstanten gesetzt werden, läßt sich den oben angeführten Gleichungen die gemeinsame Form $[f_i, f_k] = 0$ geben.

§ 31. Multiplizieren wir die vorstehenden Gleichungen mit

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial p_1},\quad \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f_1}{\partial p_2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f_{i-1}}{\partial p_i}$$

und führen in sie nur die partiellen Ableitungen der Funktionen $f, f_1, \ldots, f_i$ ein, was mit Hilfe der Gleichungen

$$f = a,\quad f_1 = a_1,\quad \ldots,\quad f_i = a_i$$

möglich ist. Dann nehmen die obigen Gleichungen folgende Gestalt an:

$$(\mathrm{a}')\quad \left\{\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f_i}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial f_i}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_m}\frac{\partial f_i}{\partial q_m} \\
&\qquad - \frac{\partial f}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial f}{\partial q_m}\frac{\partial f_i}{\partial p_m}, \\
0 &= \frac{\partial f_1}{\partial p_2}\frac{\partial f_i}{\partial q_2} + \frac{\partial f_1}{\partial p_3}\frac{\partial f_i}{\partial q_3} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial p_m}\frac{\partial f_i}{\partial q_m} \\
&\qquad - \frac{\partial f_1}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial f_1}{\partial q_m}\frac{\partial f_i}{\partial p_m}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= \frac{\partial f_{i-1}}{\partial p_i}\frac{\partial f_i}{\partial q_i} + \frac{\partial f_{i-1}}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f_i}{\partial q_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial f_{i-1}}{\partial p_m}\frac{\partial f_i}{\partial q_m} \\
&\qquad - \frac{\partial f_{i-1}}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial f_{i-1}}{\partial q_m}\frac{\partial f_i}{\partial p_m}.
\end{aligned}\right.$$

Da die Funktionen f_k die Größen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ nicht enthalten, so kann man diese Gleichungen alle auf dieselbe Form bringen, nämlich die folgende:

$$
(a'')\begin{cases}
0 = \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f_i}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial f_i}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_m}\frac{\partial f_i}{\partial q_m} \\
\quad - \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial f_i}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial f_i}{\partial p_2} - \cdots - \frac{\partial f}{\partial q_m}\frac{\partial f_i}{\partial p_m}, \\
0 = \frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial f_i}{\partial q_1} + \frac{\partial f_1}{\partial p_2}\frac{\partial f_i}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial p_m}\frac{\partial f_i}{\partial q_m} \\
\quad - \frac{\partial f_1}{\partial q_1}\frac{\partial f_i}{\partial p_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2}\frac{\partial f_i}{\partial p_2} - \cdots - \frac{\partial f_1}{\partial q_m}\frac{\partial f_i}{\partial p_m}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 = \frac{\partial f_{i-1}}{\partial p_1}\frac{\partial f_i}{\partial q_1} + \frac{\partial f_{i-1}}{\partial p_2}\frac{\partial f_i}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial f_{i-1}}{\partial p_m}\frac{\partial f_i}{\partial q_m} \\
\quad - \frac{\partial f_{i-1}}{\partial q_1}\frac{\partial f_i}{\partial p_1} - \frac{\partial f_{i-1}}{\partial q_2}\frac{\partial f_i}{\partial p_2} - \cdots - \frac{\partial f_{i-1}}{\partial q_m}\frac{\partial f_i}{\partial p_m}.
\end{cases}
$$

Die Glieder nämlich, die hinzuzufügen waren, damit alle Gleichungen dieselbe Form erhielten, verschwinden von selbst. Auf Grund der oben angegebenen Bezeichnungsweise lassen sich die vorstehenden Gleichungen so darstellen:

$$(a''')\quad 0 = [f_i, f], \quad 0 = [f_i, f_1], \; \ldots, \; 0 = [f_i, f_{i-1}].$$

Betrachten wir eine von diesen Gleichungen,

$$0 = [f_i, f_k],$$

wo k irgend eine der Zahlen $0, 1, \ldots, i-1$ bezeichnet. Wenn n eine von den Zahlen $0, 1, \ldots, i-1$ bedeutet, so wird eine der Funktionen f_i, f_k oder jede die Konstante a_n enthalten. Setzen wir an Stelle von a_n die damit gleiche Funktion f_n, so geht der Ausdruck $[f_i, f_k]$ in den folgenden über:

$$[f_i, f_k] + \frac{\partial f_i}{\partial a_n}[f_n, f_k] + \frac{\partial f_k}{\partial a_n}[f_i, f_n],$$

da der noch hinzutretende Ausdruck

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_n}\frac{\partial f_k}{\partial a_n}[f_i, f_n]$$

von selbst verschwindet. Nun folgt aber aus den Gleichungen (a''') und aus den Gleichungssystemen, die (a'') vorangehen, d. h. zu kleineren Werten von i gehören,

$$[f_n, f_k] = 0, \quad [f_i, f_n] = 0.$$

Wir sehen hieraus, daß die Gleichung

$$[f_i, f_k] = 0$$

dieselbe Form behält, wenn man bei der Bildung der partiellen Ableitungen der Funktionen f_i, f_k statt einer Konstanten a_n, die in den Funktionen vorkommt, die ihr gleiche Funktion f_n einsetzt. Wenn n eine der Zahlen $k, k+1, \ldots, i-1$ ist, so enthält die eine Funktion f_k die Konstante a_n nicht; in diesem Falle ist also bei dem obigen Beweise zu setzen $\frac{\partial f_k}{\partial a_n} = 0$, d. h. die mit $\frac{\partial f_k}{\partial a_n}$ multiplizierten Glieder sind fortzulassen.

In genau derselben Weise läßt sich zeigen, daß die Gleichung

$$[f_i, f_k] = 0$$

ungeändert bleibt, wenn man in einer der Funktionen f_i, f_k das a_n beibehält, in der andern aber an seine Stelle f_n setzt.

Verfährt man ebenso mit den übrigen Konstanten, die in f_i, f_k vorkommen, so leitet man folgenden allgemeinen Satz ab: Die Gleichungen

$$[f_i, f_k] = 0$$

gelten noch, wenn man in einer der Funktionen f_i, f_k oder in beiden vor Ausführung der partiellen Differentiationen eine oder mehrere oder alle willkürlichen Konstanten, die darin auftreten, durch die ihnen gleichen Funktionen ersetzt, oder allgemeiner sie gelten noch, welche Umgestaltungen auch die Funktionen f_i, f_k mit Hilfe der Gleichungen $f = a$, $f_1 = a_1, \ldots$, $f_{m-1} = a_{m-1}$ erfahren, bevor man die partiellen Differentiationen vornimmt.

Dieser Satz hätte auch aus Theorem II in § 12 abgeleitet werden können.

Aus der angegebenen Form werden die Gleichungen $[H_i, H_k] = 0$ in § 14 aufs neue gewonnen. Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen, dessen Integrale die Gleichungen $H_i =$ Konst. sind.

§ 32. Werden in den Gleichungen

$$f = a,\ f_1 = a_1,\ \ldots,\ f_{m-1} = a_{m-1}$$

aus jeder Funktion f_i mit Hilfe der Gleichungen

$$f = a,\ f_1 = a_1,\ \ldots,\ f_{i-1} = a_{i-1}$$

die Konstanten $a, a_1, \ldots, a_{i-1}$, die f_i enthält, eliminiert, und wird die so entstehende Funktion H_i genannt, so erhalten wir die Gleichungen

$$H = a, \; H_1 = a_1, \ldots, H_{m-1} = a_{m-1},$$

in denen die H_i Funktionen von $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ ohne willkürliche Konstanten sind. Für diese Funktionen müssen aber die Gleichungen

$$[H_i, H_k] = 0$$

Identitäten sein, da der Ausdruck links keine willkürliche Konstante enthält. Diese Gleichungen habe ich oben in § 14 schon angegeben, wobei H_i, h_i statt H_{i-1}, a_{i-1} geschrieben wurden. Unter Benutzung der Funktionen H läßt sich der obige Satz so aussprechen: Es gelten die Gleichungen

$$[H_i, H_k] = 0,$$

welche von den Veränderlichen $p_1, p_2, \ldots$ man auch vor Ausführung der partiellen Differentiationen aus den Funktionen H_i, H_k mit Hilfe der Gleichungen

$$H = a, \; H_1 = a_1, \ldots, H_{m-1} = a_{m-1}$$

eliminiert haben mag, oder welche Umgestaltungen auch mit Hilfe dieser Gleichungen die Funktionen H_i, H_k erfahren haben mögen.

Aus den Gleichungen

$$[H, H_1] = 0, \; [H, H_2] = 0, \ldots, [H, H_{m-1}] = 0$$

folgt, daß die Gleichungen

$$H = a, \; H_1 = a_1, \ldots, H_{m-1} = a_{m-1}$$

m Integrale des folgenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen sind:

$$dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_m : \; dp_1 : \; dp_2 : \cdots : \; dp_m$$
$$= \frac{\partial H}{\partial p_1} : \frac{\partial H}{\partial p_2} : \cdots : \frac{\partial H}{\partial p_m} : -\frac{\partial H}{\partial q_1} : -\frac{\partial H}{\partial q_2} : \cdots : -\frac{\partial H}{\partial q_m}.$$

Dabei ist H dieselbe Funktion, die ich oben f genannt habe. Es können auch die Gleichungen

$$f = a, \; f_1 = a_1, \ldots, f_{m-1} = a_{m-1},$$

die mit jenen Gleichungen gleichbedeutend sind, als ein System von m Integralgleichungen des obigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen betrachtet werden. Da dieses System aber $2m-1$ Integrale besitzt, so bleiben noch die $m-1$ übrigen zu ermitteln. Zu diesem Zweck bemerke ich folgendes.

Die übrigen Integrale des angegebenen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen werden ermittelt.

§ 33. Die Gleichungen

$$f=a,\ f_1=a_1,\ \ldots,\ f_{m-1}=a_{m-1}$$

oder die Gleichungen

$$H=a,\ H_1=a_1,\ \ldots,\ H_{m-1}=a_{m-1}$$

sind so gebildet, daß, nachdem man mit ihrer Hilfe $p_1, \ldots, p_m$ durch $q_1, \ldots, q_m$ ausgedrückt hat, der Ausdruck

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

ein vollständiges Differential wird. Die Werte der $p_1, \ldots, p_m$ enthalten außer den Veränderlichen $q_1, \ldots, q_m$ noch die Konstante a und die willkürlichen Konstanten $a_1, \ldots, a_{m-1}$. Differenzieren wir nach einer von ihnen, etwa nach a_i, den Ausdruck

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m,$$

so ergibt sich der Ausdruck

$$\frac{\partial p_1}{\partial a_i} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_i} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_i} dq_m,$$

der ebenfalls ein vollständiges Differential sein muß. Aus der Gleichung $f=a$, die die vorgelegte partielle Differentialgleichung ist, folgt nun aber durch Differentiation nach a_i:

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial a_i} + \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial a_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial a_i} = 0.$$

Daraus können wir mit Hilfe der vorliegenden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_m = \frac{\partial f}{\partial p_1} : \frac{\partial f}{\partial p_2} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial p_m}$$

die Gleichung ableiten

$$\frac{\partial p_1}{\partial a_i} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_i} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_i} dq_m = 0,$$

in der der Ausdruck links ein vollständiges Differential ist. Integriert man es und setzt für a_i die Werte $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$, so ergeben sich die gesuchten $m - 1$ neuen Integrale:

$$\int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_1} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_1} dq_m \right\} = b_1,$$

$$\int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_2} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_2} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_2} dq_m \right\} = b_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_{m-1}} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_{m-1}} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_{m-1}} dq_m \right\} = b_{m-1}.$$

In ihnen sind $b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$ neue willkürliche Konstanten.

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist so geschrieben, daß die Differentiale der Veränderlichen gegebenen Größen proportional sind. Man denke sich ein Hilfsdifferential dt, mit dessen Hilfe die proportionalen Größen einander gleich werden. Dann wird das vorgelegte System

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m}.$$

Es wird hiernach

$$\frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a} dq_m$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial a} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_m} \frac{\partial p_m}{\partial a} \right) dt.$$

Differenziert man aber die Gleichung $f = a$ nach a, so ergibt sich:

$$\frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial a} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_m} \frac{\partial p_m}{\partial a} = 1.$$

Daher geht die vorige Gleichung über in

$$\frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a} dq_m = dt,$$

wo die linke Seite ein vollständiges Differential ist. Wir sehen hieraus, daß es, um die Hilfsgröße t durch bloße Quadraturen zu erhalten, nicht nötig ist, alle Größen $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ durch eine von ihnen auszudrücken und dann aus einer der vorgelegten Differentialgleichungen, z. B. aus der Gleichung

$$dt = \frac{dq_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}}$$

den Wert t durch eine Quadratur zu ermitteln. Man erhält vielmehr, nachdem $p_1, p_2, \ldots, p_m$ mit Hilfe der Gleichungen $f = a$, $f_1 = a_1, \ldots, f_{m-1} = a_{m-1}$ durch $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ausgedrückt sind, t durch die Gleichung

$$t + b = \int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a} dq_m \right\},$$

wo b eine neue willkürliche Konstante ist. [14])

Über das Obige wird ein Theorem aufgestellt. Nach Bezeichnung der vorhin gesuchten Integrale mit $f_i' = b_i$ oder $H_i' = b_i$ werden die Werte der Ausdrücke $[H_i, H_k']$, $[H_i', H_k']$ ermittelt.

§ 34. V sei ein Integral der vorgelegten partiellen Differentialgleichung

$$f(q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m) = a,$$

wie es durch die Gleichung

$$V = \int \{p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m\}$$

gefunden wird, in der $p_1, p_2, \ldots, p_m$ mit Hilfe der Gleichungen $f = a$, $f_1 = a_1, \ldots, f_{m-1} = a_m$ durch $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ausgedrückt sind. Dann lassen sich die Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m}$$

in folgender Weise darstellen:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_{m-1}} = p_{m-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_{m-1}} = b_{m-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial a} = t + b,$$

wobei $a, a_1, \ldots, a_{m-1}, b, b_1, \ldots, b_{m-1}$ $2m$ willkürliche Konstanten sind. Damit ist die Integration erledigt.

Das vorstehende äußerst wichtige Theorem, das ich schon früher bewiesen hatte, ist eine Erweiterung eines andern, von *Hamilton* gefundenen Theorems, wodurch er zum ersten Male die gewöhnlichen Differentialgleichungen der Dynamik auf die partiellen Differentialgleichungen zurückführte. Er wandte aber zwei partielle Differentialgleichungen auf einmal an, wodurch das Problem unnötig verwickelt wurde. Auch war zu damaliger Zeit die Integration einer partiellen Differentialgleichung $f = a$ ein viel schwierigeres Problem und verlangte viel mehr Integrationen als die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i},$$

wie es die dynamischen Differentialgleichungen sind. Aus diesem Grunde mußte man damals glauben, er habe vielmehr die Integration der partiellen Differentialgleichungen gefördert als die der dynamischen. Ich will aber das Verdienst des berühmten Mannes nicht verkleinern. Denn es ist etwas Großes, wie in jeder Wissenschaft, so auch in der mathematischen Analysis, wenn zwischen Dingen, die durch kein Band verknüpft zu sein schienen, eine Verbindung aufgedeckt wird.[15])

Wir wollen mit i eine beliebige von den Zahlen $0, 1, \ldots, m-1$ bezeichnen und

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = \int \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial a_i} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_i} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_i} dq_m \right\} = f_i'$$

setzen. Oben (§ 32), wurde angenommen, daß aus der Funktion f_{i-1} die Funktion H_{i-1} entsteht, wenn man in jener für die Konstanten $a, a_1, \ldots, a_{i-2}$, die sie enthält, die Funktionen $H, H_1, \ldots, H_{i-2}$ einsetzt. Ebenso wollen wir jetzt annehmen, daß aus den Funktionen f'_{i-1} die Funktionen H'_{i-1} entstehen, wenn man für die Konstanten $a, a_1, \ldots, a_{m-1}$,

die in jenen auftreten, bezüglich H, H_1, ..., H_{m-1} setzt. Es sind somit auch H_1', H_2', ..., H_{m-1}' Funktionen von $q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m$ allein und enthalten nicht mehr die Konstanten $a, a_1, \ldots, a_{m-1}$. Bezeichneten i, k zwei beliebige unter den Zahlen 0, 1, ..., $m-1$, so war identisch

$$[H_i, H_k] = 0.$$

Wir wollen jetzt den Wert der Ausdrücke $[H_i, H_k']$ ermitteln.

Zunächst bemerke ich, daß in jenem Ausdruck für H_k' die Funktion f_k' gesetzt werden darf, aus der H_k' erhalten wird, indem man $a, a_1, \ldots, a_{m-1}$ durch die Funktionen $H, H_1, \ldots, H_{m-1}$ ersetzt. Wenn wir nämlich diese Substitution ausführen, nachdem die Ausdrücke $[H_i, f_k']$, $\frac{\partial f_k'}{\partial a}$, $\frac{\partial f_k'}{\partial a_1}$, ..., $\frac{\partial f_k'}{\partial a_{m-1}}$ gebildet sind, so wird, wie aus dem Bildungsgesetz des Ausdrucks $[H_i, H_k']$ leicht folgt, identisch

$$[H_i, H_k'] = [H_i, f_k'] + \frac{\partial f_k'}{\partial a}[H_i, H] + \frac{\partial f_k'}{\partial a_1}[H_i, H_1] + \cdots + \frac{\partial f_k'}{\partial a_{m-1}}[H_i, H_{m-1}].$$

Daraus ergibt sich, weil die Ausdrücke

$$[H_i, H], [H_i, H_1], \ldots, [H_i, H_{m-1}]$$

identisch verschwinden, und außerdem die Funktion f_k' nur $q_1, \ldots, q_m, a, a_1, \ldots, a_{m-1}$ enthält,

$$\begin{aligned}[H_i, H_k'] &= [H_i, f_k'] \\ &= -\left\{\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial f_k'}{\partial q_1} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial f_k'}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial f_k'}{\partial q_m}\right\} \\ &= -\left\{\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial a_k} + \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial a_k} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial a_k}\right\}.\end{aligned}$$

Man hat also

$$[H_i, H_k'] = [H_i, f_k'] = -\frac{\partial H_i}{\partial a_k},$$

falls in der Funktion H_i, um deren partielle Ableitung nach a_k zu bilden, die Veränderlichen $p_1, \ldots, p_m$ durch die Werte ersetzt werden, die man aus den Gleichungen

$$H = a, \; H_1 = a_1, \; \ldots, \; H_{m-1} = a_{m-1}$$

erhält. Es wird somit identisch $[H_i, H_k'] = 0$ sein, so oft i und k verschieden sind, und $= -1$, wenn $i = k$ ist.

Was die Werte der Ausdrücke $[H_i', H_k']$ anbetrifft, so bemerke ich zunächst, daß man durch dieselben Betrachtungen, wie wir sie oben benutzt haben,

$$[H_i', H_k'] = [H_i', f_k'] + \frac{\partial f_k'}{\partial a_i},$$

erhält, und daß diese Gleichung eine Identität wird, wenn man nach Bildung des Ausdrucks

$$[H_i', f_k'] + \frac{\partial f_k'}{\partial a_i}$$

für $a, a_1, \ldots, a_{m-1}$ wieder die Funktionen $H, H_1, \ldots, H_{m-1}$ einsetzt. Wenn wir dies am Schluß der durch unsere Symbole angedeuteten Operationen machen, so wird identisch

$$[H_i', f_k'] = [f_i', f_k'] + \frac{\partial f_i'}{\partial a}[H, f_k'] + \frac{\partial f_i'}{\partial a_1}[H_1, f_k'] + \cdots$$
$$+ \frac{\partial f_i'}{\partial a_{m-1}}[H_{m-1}, f_k'].$$

Oben haben wir nun gesehen, daß $[H_i, f_k'] = 0$ wird, so oft i und k verschieden sind, und $= -1$, wenn $i = k$ ist. Der Ausdruck $[f_i', f_k']$ aber reduziert sich auf Null, da weder f_i', noch f_k' die Größen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ enthält. Es ergibt sich also

$$[H_i', H_k'] = \frac{\partial f_k'}{\partial a_i} - \frac{\partial f_i'}{\partial a_k} = \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial a_k}}{\partial a_i} - \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial a_k} = 0.$$

Die für die Differentialgleichungen

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m}$$

gefundenen $2m$ Integrale

$$f = H = a, \quad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \quad \ldots, \quad H_{m-1} = a_{m-1},$$
$$H' = b + t, \quad H_1' = b_1, \quad H_2' = b_2, \quad \ldots, \quad H_{m-1}' = b_{m-1},$$

sind also so beschaffen, daß, wenn man i und k die Werte $1, 2, \ldots, m$ beilegt, identisch

$$[H_i, H_k] = 0, \quad [H_i', H_k'] = 0$$

wird, ferner für voneinander verschiedene i, k

$$[H_i, H_k'] = 0$$

und endlich

$$[H_i, H_i'] = -1.$$

Das sind für unsere Theorie grundlegende Sätze.[16])

Über die Umformung der obigen Formeln, die erforderlich ist, wenn die Funktion f die Hilfsveränderliche t enthält.

§ 35. Wir haben vorausgesetzt, daß in dem vorgelegten System

$$(1) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

die Funktion f nur $q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m$, aber nicht die Größe t enthalte. Der Fall, daß f auch t enthält, läßt sich aber leicht auf den früheren zurückführen. Denn angenommen, es komme in dem Obigen zu den Veränderlichen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ noch die Veränderliche t hinzu, so muß man, wenn

$$\frac{\partial V}{\partial t} = u,$$

ist, schreiben

$$(2) \qquad dV = u\,dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m.$$

Man ersetze überdies in der vorgelegten partiellen Differentialgleichung f durch $u + f$, so daß sie lautet:

$$(3) \qquad u + f = a \quad \text{oder} \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -f + a\,^{*}),$$

wo die Funktion f zwar t, aber nicht u enthält. Nach Einführung dieser Änderungen geben unsere Formeln von selbst den Fall, wo f die Größe t enthält. Da nämlich

$$\frac{\partial(u+f)}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial(u+f)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t},$$
$$\frac{\partial(u+f)}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial(u+f)}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

---

*) Die Konstante a darf man in der ganzen folgenden Untersuchung auch gleich Null setzen.

ist, so werden die gewöhnlichen Differentialgleichungen, deren Integration, wie wir in §§ 32, 33 sahen, von der Integration der angebenen partiellen Differentialgleichung abhängt, folgende:

$$dt : dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_m : \quad du : \quad dp_1 : \quad dp_2 : \cdots : \quad dp_m$$
$$= 1 : \frac{\partial f}{\partial p_1} : \frac{\partial f}{\partial p_2} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial p_m} : - \frac{\partial f}{\partial t} : - \frac{\partial f}{\partial q_1} : - \frac{\partial f}{\partial q_2} : \cdots : - \frac{\partial f}{\partial q_m}.$$

Das sind gerade die Gleichungen (1), wozu noch, wenn man will, die Gleichung

$$\frac{du}{dt} = - \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4}$$

hinzutritt. Es seien außer der vorgelegten Gleichung $u + f = a$

$$f_1 = a_1, \; f_2 = a_2, \; \ldots, \; f_m = a_m \tag{5}$$

die nach der oben von mir auseinandergesetzten Methode zu ermittelnden Integrale der Gleichungen (1). Aus ihnen bestimmen sich $u, p_1, p_2, \ldots, p_m$ so durch $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$, daß

$$u dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

ein integrabler Ausdruck wird. Die Anzahl der Gleichungen (5) ist um eine Einheit größer als bei den früheren Fragen, da zu den unabhängigen Veränderlichen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ die neue Veränderliche t hinzugekommen ist. Nach der vorgeschriebenen Regel wird $f_1 = a_1$ ein beliebiges Integral der Gleichungen (1) sein; da in ihnen weder u, noch die Konstante a vorkommt, so wird auch f_1 weder u noch a enthalten, und dasselbe wird von den Funktionen $f_2, f_3, \ldots, f_m$ gelten. f_i wird eine Funktion von $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_m, t, q_1, \ldots, q_m, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ sein. Wenn wir in f_2 für a_1 wieder f_1 einsetzen, so entstehe $f_2 = H_2$; wenn wir in f_3 für a_1, a_2 wieder f_1, H_2 einsetzen, entstehe $f_3 = H_3$; usw. Dann wird allgemein H_i eine Funktion von $p_1, \ldots, p_m, t, q_1, \ldots, q_m$, die von willkürlichen Konstanten frei ist und mit Hilfe der Gleichungen $f_1 = a_1, \ldots, f_{i-1} = a_{i-1}$ gleich f_i wird. An Stelle der Gleichungen (5) können daher auch die folgenden angewandt werden:

$$H_1 = a_1, \; H_2 = a_2, \; \ldots, \; H_m = a_m, \tag{6}$$

die ebenfalls Integrale der Gleichungen (1) sind. Hat man die Gleichungen (5) gefunden und mit ihrer Hilfe $f, p_1, p_2, \ldots, p_m$

durch die Größen t, $q_1, \ldots, q_m$, $a_1, \ldots, a_m$ ausgedrückt, so erhält man nach § 34 die übrigen Integrale der Gleichungen (1):

$$(7)\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial a_1} = \int \left\{ -\frac{\partial f}{\partial a_1} dt + \frac{\partial p_1}{\partial a_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_1} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_1} dq_m \right\} = b_1, \\ \frac{\partial V}{\partial a_2} = \int \left\{ -\frac{\partial f}{\partial a_2} dt + \frac{\partial p_1}{\partial a_2} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_2} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_2} dq_m \right\} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial V}{\partial a_m} = \int \left\{ -\frac{\partial f}{\partial a_m} dt + \frac{\partial p_1}{\partial a_m} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_m} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial a_m} dq_m \right\} = b_m. \end{cases}$$

Dabei bezeichnen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ neue willkürliche Konstanten.

Die Gleichung, die nach § 34 noch hinzugefügt werden kann,

$$\frac{\partial V}{\partial a} = t + b$$

wird hier rein identisch. Da nämlich die Ausdrücke von f, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ die Konstante a nicht enthalten und $u = a - f$ ist, so erhalten wir durch Differentiation von (2) nach a und durch Integration

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int dt,$$

was von selbst die obige Gleichung liefert.

Wir wollen in den Funktionen $\frac{\partial V}{\partial a_1}, \frac{\partial V}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a_m}$ für $a_1, a_2, \ldots, a_m$ die Funktionen $H_1, H_2, \ldots, H_m$ setzen und die dadurch entstehenden Funktionen wieder $H_1', H_2', \ldots, H_m'$ nennen. Dann werden für diese Funktionen wie oben die Gleichungen gelten

$$[H_i, H_k] = 0, \quad [H_i, H_k'] = 0, \quad [H_i', H_k'] = 0,$$
$$[H_i, H_i'] = -1,$$

wenn wir durch das Symbol $[\varphi, \psi]$ immer den Ausdruck

$$[\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial \psi}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial \psi}{\partial q_m}$$

bezeichnen. Obwohl nämlich in dem Fall, den wir hier betrachten, zu den Veränderlichen

$$q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$$

noch die Veränderlichen

$$t, u$$

hinzutreten, wonach es scheinen könnte, als müßten in den obigen Gleichungen noch Glieder hinzukommen, die von der Differentiation nach diesen Veränderlichen herrühren, so ist es dennoch nicht nötig, daß wir bei der Bildung der Ausdrücke

$$[H_i, H_k], \quad [H_i, H_k'], \quad [H_i', H_k']$$

auf die Veränderlichen t Rücksicht nehmen, die in den Funktionen H_i, H_i' steckt, und daß wir auch nach ihr partielle Differentiationen ausführen. Denn da die Funktionen H_i, H_i' das u nicht enthalten, so verschwinden die Glieder, die hinzuzufügen wären,

$$\frac{\partial H_i}{\partial t}\frac{\partial H_k}{\partial u} - \frac{\partial H_k}{\partial t}\frac{\partial H_i}{\partial u},$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial t}\frac{\partial H_k'}{\partial u} - \frac{\partial H_k'}{\partial t}\frac{\partial H_i}{\partial u},$$

$$\frac{\partial H_i'}{\partial t}\frac{\partial H_k'}{\partial u} - \frac{\partial H_k'}{\partial t}\frac{\partial H_i'}{\partial u}.$$

Setzt man

$$u + f = H,$$

so treten nur bei den Ausdrücken

$$[H, H_i], \quad [H, H_i']$$

Glieder hinzu, die von der Differentiation nach t, u herrühren. Man hat nämlich, da f das u nicht enthält,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 1,$$

so daß also die hinzuzufügenden Glieder folgende Werte erhalten:

$$\frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial H_i}{\partial u} - \frac{\partial H_i}{\partial t}\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial H_i}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial H_i'}{\partial u} - \frac{\partial H_i'}{\partial t}\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial H_i'}{\partial t}.$$

Daraus folgt

$$[H,\ H_i] - \frac{\partial H_i}{\partial t} = [f,\ H_i] - \frac{\partial H_i}{\partial t} = 0\,,$$

$$[H,\ H_i'] - \frac{\partial H_i'}{\partial t} = [f,\ H_i'] - \frac{\partial H_i'}{\partial t} = 0\,.$$

Diese Formeln lassen sich auch daraus ableiten, daß die Gleichungen

$$H_i = \text{Konst.}\,, \quad H_i' = \text{Konst.}$$

Integrale der vorgelegten Differentialgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\,, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

sind. Es wird nämlich, wenn man diese Gleichungen beachtet, identisch

$$\frac{dH_i}{dt} = 0\,, \quad \frac{dH_i'}{dt} = 0$$

sein, was die obigen Formeln liefert. Setzen wir, die Analogie der angewandten Bezeichnungsweise wahrend,

$$t + b = \frac{\partial V}{\partial a} = H'\,,$$

so bleiben die Gleichungen

$$[H',\ H_i] = 0\,, \quad [H',\ H_i'] = 0\,,$$

da die Funktionen H', H_i, H_i' das u nicht enthalten und daher die hinzuzufügenden Ausdrücke verschwinden. Was den Ausdruck $[H,\ H']$ anbetrifft, so bemerke ich, daß er verschwindet, weil H' keine der Veränderlichen

$$q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_m,\ p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_m,$$

sondern nur t enthält.

Anwendung auf die dynamischen Gleichungen, die in der Lagrangeschen Form zugrunde gelegt werden.

§ 36. Daß die Differentialgleichungen der Dynamik in allen Fällen, wo das Prinzip der kleinsten Aktion oder das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte Gültigkeit

hat, sich auf die Form der angegebenen gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

bringen lassen, hat, soviel ich weiß, zuerst *Hamilton* gelehrt.[17]) Ich will zunächst die allgemeinen dynamischen Formeln von *Lagrange* herstellen und dann aus ihnen die angegebenen Formeln ableiten.

Vorgelegt seien n Massenpunkte $m_1, m_2, \ldots, m_n$. x_i, y_i, z_i seien die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes mit der Masse m_i, und dieser Punkt werde in den Richtungen der Koordinatenachsen durch die Kräfte X_i, Y_i, Z_i angetrieben. Die mechanischen Probleme, die wir hier betrachten, und für die die angegebenen Prinzipe gelten, werden dann diejenigen sein, bei denen der Ausdruck

$$\sum m_i (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i),$$

erstreckt über alle n Körper, ein vollständiges Differential ist. Wird dessen Integral U genannt, so sind die dynamischen Differentialgleichungen in der folgenden symbolischen Gleichung enthalten:

$$\sum m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right) = \delta U,$$

die für alle virtuellen Variationen δx_i, δy_i, δz_i erfüllt sein muß, d. h. für alle Variationen, welche die den n materiellen Punkten auferlegten Bedingungen nicht stören. Das hat seinerzeit *Lagrange* gelehrt, indem er das Prinzip von *d'Alembert* mit dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten verband.[18]) Setzt man nun aber

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i', \quad \frac{dy_i}{dt} = y_i', \quad \frac{dz_i}{dt} = z_i',$$

so wird jene symbolische Gleichung

$$\frac{d}{dt} \sum m_i (x_i' \delta x_i + y_i' \delta y_i + z_i' \delta z_i)$$
$$- \sum m_i (x_i' \delta x_i' + y_i' \delta y_i' + z_i' \delta z_i') = \delta U.$$

Setzt man die lebendige Kraft

$$\tfrac{1}{2} \sum m_i (x_i' x_i' + y_i' y_i' + z_i' z_i') = T,$$

so läßt sich die Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{d}{dt}\sum m_i(x_i'\delta x_i + y_i'\delta y_i + z_i'\delta z_i) = \delta(U+T).$$

Wir wollen noch $U+T=R$ einführen und diese Gleichung so fassen:

$$\delta R = \frac{d}{dt}\sum_i\left(\frac{\partial R}{\partial x_i'}\delta x_i + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\delta y_i + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\delta z_i\right).$$

Das dürfen wir, weil U die Größen x_i', y_i', z_i' überhaupt nicht enthält. Drücken wir nun die $3n$ Größen x_i, y_i, z_i durch m andere Größen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ aus, und sei wieder

$$q_i' = \frac{dq_i}{dt}.$$

Dann läßt sich leicht zeigen, daß, wenn auch R durch $q_1, \ldots, q_m$, $q_1', \ldots, q_m'$ ausgedrückt ist,

$$(1)\quad \begin{cases} \sum_i\left(\frac{\partial R}{\partial x_i'}\delta x_i + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\delta y_i + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\partial z_i\right) \\ = \frac{\partial R}{\partial q_1'}\delta q_1 + \frac{\partial R}{\partial q_2'}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m'}\delta q_m \end{cases}$$

wird. Man hat nämlich

$$\begin{aligned} &\sum_i\left(\frac{\partial R}{\partial x_i'}\delta x_i + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\delta y_i + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\delta z_i\right) \\ =&\sum_i\left(\frac{\partial R}{\partial x_i'}\frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\frac{\partial y_i}{\partial q_1} + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)\delta q_1 \\ +&\sum_i\left(\frac{\partial R}{\partial x_i'}\frac{\partial x_i}{\partial q_2} + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\frac{\partial y_i}{\partial q_2} + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\frac{\partial z_i}{\partial q_2}\right)\delta q_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +&\sum_i\left(\frac{\partial R}{\partial x_i'}\frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial R}{\partial y_i'}\frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial R}{\partial z_i'}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right)\delta q_m. \end{aligned}$$

Da ferner

$$x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}q_1' + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}q_2' + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_m}q_m'$$

ist, so wird sein

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \text{ und ähnlich } \frac{\partial y_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial z_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial z_i}{\partial q_k},$$

woraus sich ergibt

$$\sum_i \left(\frac{\partial R}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial R}{\partial y_i'} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial R}{\partial z_i'} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$
$$= \sum_i \left(\frac{\partial R}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial q_k'} + \frac{\partial R}{\partial y_i'} \frac{\partial y_i'}{\partial q_k'} + \frac{\partial R}{\partial z_i'} \frac{\partial z_i'}{\partial q_k'} \right) = \frac{\partial R}{\partial q_k'},$$

mithin

$$\sum_i \left(\frac{\partial R}{\partial x_i'} \delta x_i + \frac{\partial R}{\partial y_i'} \delta y_i + \frac{\partial R}{\partial z_i'} \delta z_i \right) = \sum_k \frac{\partial R}{\partial q_k'} \delta q_k,$$

was zu beweisen war. Wir haben also, wenn R durch die neuen Größen q_k, q_k' ausgedrückt ist, die Gleichung

$$\delta R = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial q_1'} \delta q_1 + \frac{\partial R}{\partial q_2'} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m'} \delta q_m \right).$$

Ist π die Anzahl der Bedingungsgleichungen, denen die $3n$ Koordinaten genügen müssen, so muß m entweder gleich $3n - \pi$ oder größer als $3n - \pi$ werden. Wenn $m = 3n - \pi + \nu$ ist, wo ν eine positive Zahl bezeichnet, so hat man zwischen den Größen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ noch ν Bedingungsgleichungen, woraus ebensoviele Bedingungsgleichungen für die Variationen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_m$ hervorgehen. Ist hingegen $m = 3n - \pi$, so sind die Größen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ voneinander unabhängig, und daher die Variationen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_m$ völlig willkürlich. In diesem Falle fließt daher aus der obigen symbolischen Gleichung das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial R}{\partial q_1} = \frac{d \frac{\partial R}{\partial q_1'}}{dt}, \quad \frac{\partial R}{\partial q_2} = \frac{d \frac{\partial R}{\partial q_2'}}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial R}{\partial q_m} = \frac{d \frac{\partial R}{\partial q_m'}}{dt}.$$

In dieser Form findet man die dynamischen Differentialgleichungen schon in der ersten Ausgabe der *Lagrange*schen Mechanik angegeben.[19])

Die Hamiltonsche Form der dynamischen Gleichungen wird hergeleitet; sie fällt mit dem oben betrachteten System zusammen. Das Theorem VI über die Auffindung eines dritten Integrals aus zwei beliebigen wird auf das dynamische System angewandt.

§ 37. Der berühmte *Poisson* hat in seiner ausgezeichneten Abhandlung über die Variation der Konstanten (Journal de l'École Polyt. Cah. XV) an Stelle der Größen $q_1', q_2', \ldots, q_m'$ andere in die dynamischen Formeln eingeführt, nämlich

$$p_1 = \frac{\partial R}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial R}{\partial q_2'}, \quad \ldots, \quad p_m = \frac{\partial R}{\partial q_m'}.$$

Unter Anwendung gerade dieser Veränderlichen hat dann *Hamilton* statt R die neue Funktion

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial R}{\partial q_1'} q_1' + \frac{\partial R}{\partial q_2'} q_2' + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m'} q_m' - R \\ &= p_1 q_1' + p_2 q_2' + \cdots + p_m q_m' - R \end{aligned}$$

eingeführt. Ist diese Funktion durch $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ ausgedrückt, und variieren wir alle diese Größen gleichzeitig, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta H = & \; q_1' \delta p_1 + q_2' \delta p_2 + \cdots + q_m' \delta p_m \\ & - \frac{\partial R}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial R}{\partial q_2} \delta q_2 - \cdots - \frac{\partial R}{\partial q_m} \delta q_m. \end{aligned}$$

Es verschwindet nämlich der Ausdruck

$$\begin{aligned} & p_1 \delta q_1' + p_2 \delta q_2' + \cdots + p_m \delta q_m' \\ & - \left(\frac{\partial R}{\partial q_1'} \delta q_1' + \frac{\partial R}{\partial q_2'} \delta q_2' + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m'} \delta q_m' \right). \end{aligned}$$

Der für δH gefundene Ausdruck liefert nun die partiellen Ableitungen der Funktion H nach den neuen Veränderlichen wie folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H}{\partial p_1} = q_1', \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = q_2', \quad \ldots, \quad \frac{\partial H}{\partial p_m} = q_m', \\ & \frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial R}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_2} = -\frac{\partial R}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial H}{\partial q_m} = -\frac{\partial R}{\partial q_m}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte ein, so wird umgekehrt R aus der Funktion H erhalten durch die Formel

$$\begin{aligned} R &= p_1 q_1' + p_2 q_2' + \cdots + p_m q_m' - H \\ &= p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial H}{\partial p_m} - H. \end{aligned}$$

Führt man also die Größen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ als Veränderliche ein, so wird die gefundene symbolische Gleichung folgende:

$$\begin{aligned} &\delta\left(p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial H}{\partial p_m} - H\right) \\ &= \frac{d}{dt}(p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_m \delta q_m)\,. \end{aligned}$$

Nimmt man die Variation und Differentiation vor und setzt die Werte

$$q_k' = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

ein, so tritt auf beiden Seiten der obigen Gleichung der Ausdruck

$$p_1 \delta \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \delta \frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m \delta \frac{\partial H}{\partial p_m}$$

auf. Wird er gestrichen, so erhalten wir die folgende Formel:

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &-\left(\frac{\partial H}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial q_m}\delta q_m\right) \\ &= \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \frac{dp_2}{dt}\delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt}\delta q_m\,. \end{aligned} \right.$$

Wenn $m = 3n - \pi$ ist, wo π die Zahl der Bedingungsgleichungen bedeutet, denen die Koordinaten der materiellen Punkte genügen müssen, so sind die Größen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ganz unabhängig voneinander, und ihre Variationen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_m$ alle willkürlich. In diesem Falle fließen aus (1) die dynamischen Differentialgleichungen, in den Veränderlichen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ geschrieben:

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{dq_1}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{dq_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial H}{\partial p_m} = \frac{dq_m}{dt}, \\ &-\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{dp_1}{dt}, \quad -\frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{dp_2}{dt}, \quad \ldots, \quad -\frac{\partial H}{\partial q_m} = \frac{dp_m}{dt}. \end{aligned} \right.$$

In dieser Form hat zum ersten Male *Hamilton* die dynamischen Gleichungen dargestellt, und ich glaube, daß sich daraus ein nicht geringer Nutzen für die analytische Mechanik ergeben hat. Schon *Poisson* hatte a. a. O. bemerkt, daß die durch die Größen q_i, p_i ausgedrückten Werte der $\frac{dq_i}{dt} = q_i'$ so beschaffen sind, daß man hat

$$\frac{\partial q_i'}{\partial p_k} = \frac{\partial q_k'}{\partial p_i}$$

(Journal de l'École Polyt. Cah. XV, pag. 275), und diese Formeln reichten für seinen Zweck aus. Aus den Formeln (2) fließen sofort noch die folgenden:

$$\frac{\partial q_i'}{\partial q_k} = -\frac{\partial p_k'}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i'}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k'}{\partial q_i},$$

wenn wir wieder $p_i' = \frac{dp_i}{dt}$ setzen.

Die *Hamilton*sche Form der dynamischen Differentialgleichungen ist dieselbe wie die des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, dessen Integration ich oben gelehrt habe (§§ 33, 34).

Wir wollen in der oben, § 36 (1), bewiesenen Gleichung

$$\sum_i \left(\frac{\partial R}{\partial x_i'} \delta x_i + \frac{\partial R}{\partial y_i'} \delta y_i + \frac{\partial R}{\partial z_i'} \delta z_i\right) = \sum_k \frac{\partial R}{\partial q_k'} \delta q_k$$

für δx_i, δy_i, δz_i, δq_k gleichzeitig x_i', y_i', z_i', q_k' setzen; das ist erlaubt, wenn man annimmt, daß die Bedingungsgleichungen t nicht enthalten. Dann erhalten wir:

$$\sum_i \left(\frac{\partial R}{\partial x_i'} x_i' + \frac{\partial R}{\partial y_i'} y_i' + \frac{\partial R}{\partial z_i'} z_i'\right) = \sum_k \frac{\partial R}{\partial q_k'} q_k'.$$

Wird hier der Wert $R = T + U$ eingesetzt, so ergibt sich, da

$$\frac{\partial R}{\partial x_i'} = \frac{\partial T}{\partial x_i'} = m_i x_i', \quad \frac{\partial R}{\partial y_i'} = \frac{\partial T}{\partial y_i'} = m_i y_i',$$
$$\frac{\partial R}{\partial z_i'} = \frac{\partial T}{\partial z_i'} = m_i z_i'$$

ist,

$$2T = \sum_k \frac{\partial R}{\partial q_k'} q_k' = H + R = H + T + U.$$

Bei den Anwendungen auf die Dynamik ist also die Funktion H gleich $T - U$, so daß die Gleichung

$$H = h,$$

in der h eine willkürliche Konstante ist, direkt die auf die Erhaltung der lebendigen Kräfte bezügliche Gleichung ist.

Das oben bewiesene Theorem VI lehrt folgendes: Hat man irgend zwei andere Integrale der Gleichungen (2),

$$\varphi = a, \quad \psi = b,$$

wo a und b willkürliche, in φ und ψ nicht eingehende Konstanten sind, so leitet sich daraus im allgemeinen ein neues Integral ab:

$$\text{Konst.} = [\varphi, \psi] = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m}.$$

Das Problem, den Ausdruck $[\varphi, \psi]$ durch eine größere Zahl von Veränderlichen darzustellen, zwischen denen Bedingungsgleichungen gegeben sind.

§ 38. Sowohl der Nützlichkeit wegen als auch wegen der Schwierigkeit der Sache, als auch weil ich alles genau untersuchen möchte, was mit dem so vieler Eigenschaften sich erfreuenden Ausdruck $[\varphi, \psi]$ zusammenhängt, werde ich hier folgendes erforschen: Welche Gestalt nimmt $[\varphi, \psi]$ an, wenn darin an Stelle der voneinander unabhängigen Größen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ wieder die $3n$ Koordinaten x_i, y_i, z_i eingesetzt werden, die gewissen gegebenen Bedingungen genügen müssen, oder wenn überhaupt eine größere Zahl von Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ eingeführt wird, zwischen denen $\mu - m$ Relationen bestehen? Bei diesem Problem wird vorausgesetzt, daß φ und ψ als Funktionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ und von

$$\xi_1' = \frac{d\xi_1}{dt}, \quad \xi_2' = \frac{d\xi_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \xi_\mu' = \frac{d\xi_\mu}{dt}$$

gegeben sind, und der zu ermittelnde Ausdruck von $[\varphi, \psi]$ muß so beschaffen sein, daß in ihm keine Größen zu finden sind, zu deren wirklicher Bildung Beziehungen gegeben sein müssen, mit deren Hilfe sich die Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ und

$q_1, q_2, \ldots, q_m$ durcheinander bestimmen. In der zu ermittelnden Formel darf also keine der Veränderlichen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ zurückbleiben. Ich will das Problem noch genauer auseinandersetzen.

Das vorgelegte Problem ist folgendes:

Es seien zwischen den μ Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ Bedingungsgleichungen

$$F = 0, \quad \Phi = 0 \quad \text{usw.}$$

in der Anzahl $\mu - m$ gegeben, so daß man für die $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_\mu$ die Gleichungen hat

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\xi'_1 + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\xi'_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\xi'_\mu = 0,$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\xi'_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\xi'_2 + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\xi'_\mu = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Da zwischen den μ Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ gerade $\mu - m$ Bedingungsgleichungen gegeben sind, so lassen sich diese Größen durch m Größen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ausdrücken, die voneinander unabhängig sind. Setzt man

$$q_i' = \frac{dq_i}{dt},$$

so können also auch die Größen $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_\mu$ durch $q_1, q_2, \ldots, q_m, q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$ ausgedrückt werden, mit Hilfe der Formeln

$$\xi_i' = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_1}q'_1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_2}q'_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_m}q'_m.$$

Es sei ferner R irgend eine Funktion von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu, \xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_\mu$ und

$$H = \xi'_1\frac{\partial R}{\partial \xi'_1} + \xi'_2\frac{\partial R}{\partial \xi'_2} + \cdots + \xi'_\mu\frac{\partial R}{\partial \xi'_\mu} - R.$$

Man setze

$$\frac{\partial R}{\partial \xi'_1} = v_1, \quad \frac{\partial R}{\partial \xi'_2} = v_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial R}{\partial \xi'_\mu} = v_\mu$$

und drücke H durch $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ aus. Differentiiert man diesen Ausdruck nach $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$, so

folgt aus der obigen Analysis, daß man dann wieder Größen erhält, die gleich $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_\mu$ sind, d. h. daß

$$\xi'_1 = \frac{\partial H}{\partial v_1}, \quad \xi'_2 = \frac{\partial H}{\partial v_2}, \quad \ldots, \quad \xi'_\mu = \frac{\partial H}{\partial v_\mu}$$

wird. Kennt man also jenen Ausdruck von H, so hat man den Ausdruck von R durch $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ mit Hilfe der Formel

$$R = v_1 \frac{\partial H}{\partial v_1} + v_2 \frac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots v_\mu \frac{\partial H}{\partial v_\mu} - H.$$

Man setze nun die Ausdrücke von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ durch $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und die Ausdrücke von $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_\mu$ durch $q_1, q_2, \ldots, q_m, q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$ ein und stelle R durch diese $2m$ Größen dar. Ist das geschehen, so beweist man in derselben Weise, wie Formel (1) in § 36 bewiesen worden ist, die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}&\xi'_1 \frac{\partial R}{\partial \xi'_1} + \xi'_2 \frac{\partial R}{\partial \xi'_2} + \cdots + \xi'_\mu \frac{\partial R}{\partial \xi'_\mu} \\ &= q'_1 \frac{\partial R}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial R}{\partial q'_2} + \cdots + q'_m \frac{\partial R}{\partial q'_m}.\end{aligned}$$

Drückt man also R durch $q_1, q_2, \ldots, q_m, q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$ aus, so stellt sich die Funktion H in diesen Größen so dar:

$$H = q'_1 \frac{\partial R}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial R}{\partial q'_2} + \cdots + q'_m \frac{\partial R}{\partial q'_m} - R.$$

Man setze

$$p_1 = \frac{\partial R}{\partial q'_1}, \quad p_2 = \frac{\partial R}{\partial q'_2}, \quad \ldots, \quad p_m = \frac{\partial R}{\partial q'_m}$$

und drücke H durch $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ aus. Differenziert man diesen Ausdruck nach $p_1, p_2, \ldots, p_m$, so erhält man wieder Größen, die gleich $q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$ sind, d. h. man hat die Gleichungen:

$$q'_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad q'_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad q'_m = \frac{\partial H}{\partial p_m}.$$

Es wird also sein

$$R = v_1 \frac{\partial H}{\partial v_1} + v_2 \frac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + v_\mu \frac{\partial H}{\partial v_\mu} - H$$
$$= p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial H}{\partial p_m} - H.$$

Dies festgesetzt seien φ, ψ zwei beliebige Funktionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu, \xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_\mu'$. Man drücke sie durch $q_1, q_2, \ldots, q_m, q_1', q_2', \ldots, q_m'$ aus und dann weiter mit Hilfe der Gleichungen

$$p_1 = \frac{\partial R}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial R}{\partial q_2'}, \quad \ldots, \quad p_m = \frac{\partial R}{\partial q_m'}$$

durch $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$. Darauf bilde man den Ausdruck

$$[\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial \psi}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial \psi}{\partial q_m}.$$

Die Funktionen φ, ψ können auch durch die Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ dargestellt werden. Kennt man diese Ausdrücke, so ist die Aufgabe folgende:

Gegeben sind die Ausdrücke der drei Funktionen H, φ, ψ durch die Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ und die Gleichungen, die zwischen den $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ stattfinden, nämlich

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \quad \text{usw.},$$

nicht aber sind bekannt Beziehungen, auf Grund deren sich die Größen $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_\mu$ durch andere unabhängige $q_1, q_2, \ldots, q_m$ bestimmen. Man soll den Wert des Ausdrucks $[\varphi, \psi]$ finden.

Das ist das vorgelegte Problem.[20])

§ 39. Der Auseinandersetzung des obigen Problems will ich folgende Erläuterungen beifügen. Die Ausdrücke der Größen $\xi_i, \xi_i', R, H, \varphi, \psi$ durch $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ sind vollkommen bestimmt, sobald Beziehungen gegeben sind, mit deren Hilfe unter Heranziehung der Gleichungen $F = 0$,

$\Phi = 0, \ldots$ sich die Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ durch $q_1, q_2 \ldots, q_m$ darstellen lassen. Dagegen können die Ausdrücke von q_i, p_i, ξ_i', R, H, φ, ψ durch $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ mit Hilfe der Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0, \ldots$ und der daraus durch Differentiation entstehenden auf mannigfache Weise verändert werden. Wir wollen zunächst von der Bestimmung der Größen v_i durch ξ_i, ξ_i' und von der Bildung der Funktion H, ausgedrückt durch die ξ_i, v_i, handeln. Dabei müssen wir von R ausgehen. Das war irgend eine Funktion der ξ_i, ξ_i'. Setzt man

$$F' = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\xi_1' + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\xi_2' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\xi_\mu',$$

$$\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\xi_1' + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\xi_2' + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\xi_\mu',$$

. . . .

so darf man zu der Funktion R die Ausdrücke F, $\Phi, \ldots$, F', Φ', ..., multipliziert mit willkürlichen Faktoren λ, μ, ..., λ_1, μ, ..., addieren, da dies nach der Voraussetzung verschwindende Ausdrücke sind. Es wird einen großen Unterschied machen, ob zu R nur Glieder $\lambda F + \mu \Phi + \ldots$ oder auch Glieder $\lambda_1 F' + \mu_1 \Phi' + \ldots$ hinzugefügt werden. Denn im ersteren Falle bleiben die Werte der

$$v_i = \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}$$

genau dieselben, oder sie erleiden vielmehr nur insofern eine Änderung, als zu ihnen Glieder hinzutreten, die mit den verschwindenden Funktionen F, $\Phi, \ldots$ multipliziert sind. Es erfahren also auch umgekehrt die Ausdrücke der ξ_i' und der Funktionen R, H durch die Größen ξ_i, v_i nur dieselben Änderungen, d. h. es treten zu ihnen Glieder hinzu, die mit den Größen F, $\Phi, \ldots$ multipliziert sind, dagegen keine Glieder mit F', $\Phi', \ldots$

Ganz anders aber, wenn man zu R auch Glieder $\lambda_1 F' + \mu_1 \Phi' + \cdots$ addiert. Allerdings wird die Funktion

$$H = \xi_1' \frac{\partial R}{\partial \xi_1'} + \xi_2' \frac{\partial R}{\partial \xi_2'} + \cdots + \xi_\mu' \frac{\partial R}{\partial \xi_\mu'} - R$$

ihren numerischen Wert sicher nicht ändern, da identisch

$$\xi_1'\frac{\partial F'}{\partial \xi_1'}+\xi_2'\frac{\partial F'}{\partial \xi_2'}+\cdots+\xi_\mu'\frac{\partial F'}{\partial \xi_\mu'}-F'=0,$$

$$\xi_1'\frac{\partial \Phi'}{\partial \xi_1'}+\xi_2'\frac{\partial \Phi'}{\partial \xi_2'}+\cdots+\xi_\mu'\frac{\partial \Phi'}{\partial \xi_\mu'}-\Phi'=0,$$

. . . .

ist. Aber die Größen v_i werden nicht etwa bloß durch Hinzutreten verschwindender Glieder ihre Form ändern, sondern sie nehmen sogar andere numerische Werte an. Denn es wird

$$v_i=\frac{\partial R}{\partial \xi_i'}+\lambda_1\frac{\partial F'}{\partial \xi_i'}+\mu_1\frac{\partial \Phi'}{\partial \xi_i'}+\cdots,$$

wenn man die verschwindenden Glieder

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \xi_i'}F+\frac{\partial \mu}{\partial \xi_i'}\Phi+\cdots+\frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi_i'}F'+\frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_i'}\Phi'+\cdots$$

fortläßt. Deshalb muß auch die Form der Funktion H, ausgedrückt durch ξ_i, v_i, andere Änderungen erfahren, nicht bloß ein Hinzutreten verschwindender Funktionen; denn der Wert von H muß ungeändert bleiben, während die Größen $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$, die in H eingehen, andere Werte annehmen. Um die Änderungen genauer anzugeben, sei

$$l_i=\lambda_1\frac{\partial F'}{\partial \xi_i'}+\mu_1\frac{\partial \Phi'}{\partial \xi_i'}\cdots,$$

$$L_i=\frac{\partial \lambda}{\partial \xi_i'}F+\frac{\partial \mu}{\partial \xi_i'}\Phi+\cdots+\frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi_i'}F'+\frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_i'}\Phi'+\cdots,$$

es seien ferner v_i^0 die Größen, in die die v_i übergehen, wenn für R gesetzt wird

$$R+\lambda F+\mu\Phi+\cdots+\lambda_1F'+\mu_1\Phi'+\cdots$$

Dann wird sein

$$v_i=v_i^0-l_i-L_i.$$

Setzt man ferner

$$\lambda^0=\sum\xi_i'\frac{\partial \lambda}{\partial \xi_i'}-\lambda,\quad \mu^0=\sum\xi_i'\frac{\partial \mu}{\partial \xi_i'}-\mu,\ \ldots,$$

$$\lambda_1^0=\sum\xi_i'\frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi_i'}\qquad,\quad \mu_1^0=\sum\xi_i'\frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_i'}\qquad,\ \ldots,$$

so geht H in den Ausdruck über

$$H^0 = H + \lambda^0 F + \mu^0 \Phi + \cdots + \lambda_1^0 F' + \mu_1^0 \Phi' + \cdots,$$

wenn man die sich aufhebenden Größen

$$\lambda_1 \left\{ \sum_i \xi_i' \frac{\partial F'}{\partial \xi_i'} - F' \right\}, \quad \mu_1 \left\{ \sum_i \xi_i' \frac{\partial \Phi'}{\partial \xi_i'} - \Phi' \right\}, \ldots$$

fortläßt und in dem ersten Gliede H für die v_i die Werte $v_i^0 - l_i - L_i$ setzt. Wendet man diese Ausdrücke an, so findet man ohne große Mühe, was herauskommen muß,

$$\frac{\partial H^0}{\partial v_i^0} = \frac{\partial H}{\partial v_i} = \xi_i'.$$

Wirft man nämlich die verschwindenden Glieder fort, so kommt

$$\frac{\partial H^0}{\partial v_i^0} = \frac{\partial H}{\partial v_i} - \sum_k \frac{\partial H}{\partial v_k} \left(\frac{\partial l_k}{\partial v_i^0} + \frac{\partial L_k}{\partial v_i^0} \right) + \lambda_1^0 \frac{\partial F'}{\partial v_i^0} + \mu_1^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial v_i^0} + \cdots;$$

ferner ist, da alle Funktionen der ξ_i allein nach v_i^0 differentiiert verschwinden,

$$\sum_k \frac{\partial H}{\partial v_k} \frac{\partial l_k}{\partial v_i^0} = \sum_k \xi_k' \frac{\partial l_k}{\partial v_i^0} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial v_i^0} \sum_k \xi_k' \frac{\partial F'}{\partial \xi_k'} + \frac{\partial \mu_1}{\partial v_i^0} \sum_k \xi_k' \frac{\partial \Phi'}{\partial \xi_k'} + \cdots = 0,$$

$$\sum_k \frac{\partial H}{\partial v_k} \frac{\partial L_k}{\partial v_i^0} = \sum_k \xi_k' \frac{\partial L_k}{\partial v_i^0} = \frac{\partial F'}{\partial v_i^0} \sum_h \xi_k' \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi_k'} + \frac{\partial \Phi'}{\partial v_i^0} \sum_k \xi_k' \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_k'} + \cdots$$

$$= \lambda_1^0 \frac{\partial F'}{\partial v_i^0} + \mu_1^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial v_i^0} + \cdots$$

Es ergibt sich somit, wenn man die sich aufhebenden Glieder fortwirft, die zu beweisende Formel

$$\frac{\partial H^0}{\partial v_i^0} = \frac{\partial H}{\partial v_i},$$

die für jeden Wert des Index i gilt. Ich habe das Obige, obwohl es zur Lösung unseres Problems nicht nötig ist, hierher gesetzt, um, wie ich schon andeutete, die Sache zu erläutern; denn bei dieser Frage kommt man leicht zu Irrtümern.

Auch die Funktionen φ und ψ können auf mannigfache Weise verändert werden, indem man zu ihnen Glieder addiert, die mit F, Φ, ..., F', Φ', ... multipliziert sind, oder φ, ψ,

wie es verlangt wird, durch die Größen ξ_i, v_i ausdrückt und dann Glieder addiert, die mit F, Φ, ..., A, B, ... multipliziert sind; dabei bezeichnen wir mit A, B, ... die durch ξ_i, v_i dargestellten Werte von F', Φ', ..., d. h. die Ausdrücke

$$A = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\frac{\partial H}{\partial v_1} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\frac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial H}{\partial v_\mu},$$

$$B = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\frac{\partial H}{\partial v_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\frac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial H}{\partial v_\mu},$$

. . . .

Da diese Ausdrücke verschwinden müssen, so sind $A = 0$, $B = 0$, ... Bedingungsgleichungen, die zwischen den ξ_i, v_i bestehen.

Vor allem ist folgendes wohl festzuhalten. Man darf zwar unter den verschiedenen Formen, die die Funktion R vermöge der Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$, ..., $F' = 0$, $\Phi' = 0$, ... annehmen kann, eine beliebige auswählen. Ist sie aber gewählt, und hat man in der vorgeschriebenen Weise daraus die Ausdrücke der v_i durch die Größen ξ_i, ξ_i' und der Funktion H durch die Größen ξ_i, v_i abgeleitet, so wird angenommen, daß diese Ausdrücke nicht mehr mit Hilfe jener Gleichungen abgeändert werden. Sonst kämen wir in unendliche Irrtümer hinein.

Die Bildung der gesuchten Ausdrücke wird auf die Bestimmung zweier Summen zurückgeführt.

§ 40. Ich will zunächst Gleichungen herstellen, mit deren Hilfe sich die Größen v_i durch die q_i und p_i bestimmen lassen, sofern der Ausdruck der Funktion H durch die ξ_i und v_i gegeben ist und die Ausdrücke der Größen ξ_i durch die q_i. Wir haben

$$\delta \xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_i}{\partial q_m}\delta q_m,$$

mithin

$$\sum_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}\delta \xi_i = \delta q_1 \sum_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_1} + \delta q_2 \sum_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_2} + \cdots$$
$$+ \delta q_m \sum_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_m}.$$

Da

$$\frac{\partial \xi_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_k}$$

ist, weil in dem Ausdruck ξ_i' durch die Größen q_k, q_k' das q_k' nur linear und mit $\frac{\partial \xi_i}{\partial q_k}$ multipliziert auftritt, so wird

$$\sum_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_k} = \sum_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'} \frac{\partial \xi_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial R}{\partial q_k'}$$

und daher

$$\sum_i \frac{\partial R}{\partial \xi_i'} \delta \xi_i = \frac{\partial R}{\partial \xi_1'} \delta \xi_1 + \frac{\partial R}{\partial \xi_2'} \delta \xi_2 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial \xi_\mu'} \delta \xi_\mu$$
$$= \frac{\partial R}{\partial q_1'} \delta q_1 + \frac{\partial R}{\partial q_2'} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m'} \delta q_m.$$

Da wir

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_i'} = v_i, \quad \frac{\partial R}{\partial q_i'} = p_i$$

gesetzt haben, so läßt sich die obige Gleichung so schreiben:

(1) $v_1 \delta \xi_1 + v_2 \delta \xi_2 + \cdots + v_\mu \delta \xi_\mu = p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_m \delta q_m.$

In der Gleichung (1) sind die Variationen δq_1, δq_2, ..., δq_m völlig willkürlich, während zwischen den Variationen $\delta \xi_1$, $\delta \xi_2$, ..., $\delta \xi_\mu$ die $\mu - m$ Bedingungen bestehen:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1} \delta \xi_1 + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \delta \xi_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} \delta \xi_\mu = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \delta \xi_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} \delta \xi_2 + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu} \delta \xi_\mu = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Aus diesem Grunde lassen sich auf Grund der Gleichung (1) zwar die Größen p_i durch die ξ_i, v_i, nicht aber die Größen v_i durch die p_i bestimmen. Denn man erhält aus (1) nur die m Gleichungen

$$p_1 = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_1},$$
$$p_2 = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_2} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_2} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_m = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_m} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_m} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_m}.$$

Zur vollständigen Bestimmung der v_i muß man außer den vorstehenden m Gleichungen noch die folgenden $\mu - m$ Gleichungen anwenden:

$$(2)\quad \begin{cases} 0 = A = \dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial H}{\partial v_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial H}{\partial v_\mu}, \\ 0 = B = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial H}{\partial v_1} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial H}{\partial v_\mu}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Nachdem die Gleichungen (1) und (2) aufgestellt sind, durch die die Größen v_i bestimmt werden, wollen wir nunmehr an die beabsichtigte Bildung des Ausdrucks der Größe $[\varphi, \psi]$ durch die ξ_k, v_k herantreten.

Es wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} = {} & \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i} \\ & + \frac{\partial \varphi}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu}\frac{\partial v_\mu}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial p_i} = {} & \frac{\partial \psi}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial p_i} + \frac{\partial \psi}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial p_i} + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial v_\mu}\frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation dieser beiden Ausdrücke erhält man den Wert von $\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_i}\dfrac{\partial \psi}{\partial p_i}$, woraus durch Vertauschung von φ und ψ der Wert von $\dfrac{\partial \varphi}{\partial p_i}\dfrac{\partial \psi}{\partial q_i}$ sich ergibt. Subtrahiert man beide, so erhält man den Wert des Ausdrucks

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i}.$$

Erteilt man i die Werte $1, 2, \ldots, m$ und summiert, so ergibt sich daraus der folgende Ausdruck für $[\varphi, \psi]$:

$$(3)\quad \begin{cases} [\varphi, \psi] = \sum \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}\dfrac{\partial \psi}{\partial v_{k'}} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial v_{k'}}\dfrac{\partial \psi}{\partial \xi_k}\right)\dfrac{\partial \xi_k}{\partial q_i}\dfrac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} \\ \qquad\qquad + \sum \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial v_k}\dfrac{\partial \psi}{\partial v_{k'}} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial v_{k'}}\dfrac{\partial \psi}{\partial v_k}\right)\dfrac{\partial v_k}{\partial q_i}\dfrac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}. \end{cases}$$

In diesem Ausdruck hat man hinter dem Summenzeichen den Indizes k und k' die Werte $1, 2, \ldots, \mu$ beizulegen und dem Index i die Werte $1, 2, \ldots, m$. Die zweite Summe kann man auch so schreiben:

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} \frac{\partial \psi}{\partial v_{k'}} \left(\frac{\partial v_k}{\partial q_i} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} - \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial v_k}{\partial p_i} \right).$$

Wir wollen jetzt für beliebige gegebene Werte von k und k' den Wert der einfachen Summen

$$\sum_i \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} = \frac{\partial \xi_k}{\partial q_1} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_1} + \frac{\partial \xi_k}{\partial q_2} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \xi_k}{\partial q_m} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_m},$$

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\frac{\partial v_k}{\partial q_i} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} - \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial v_k}{\partial p_i} \right) = {} & \frac{\partial v_k}{\partial q_1} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_1} + \frac{\partial v_k}{\partial q_2} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial v_k}{\partial q_m} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_m} \\ & - \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_1} \frac{\partial v_k}{\partial p_1} - \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_2} \frac{\partial v_k}{\partial p_2} - \cdots - \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_m} \frac{\partial v_k}{\partial p_m} \end{aligned}$$

ermitteln. In diesen Summen kommen nicht $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ selbst vor, sondern nur ihre partiellen Ableitungen nach den Größen q_i, p_i. Ich will nun untersuchen, wie sich diese beiden Summen durch $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ allein ausdrücken.

Die erste der angegebenen Summen wird bestimmt.

§ 41. Die Größen ξ_k sind vollkommen bestimmte Funktionen der q_k; denn wenn die ξ_k auch zahlreicher sind als die q_k, die wir durch jene ausgedrückt annehmen, so können doch unter Heranziehung der zwischen den ξ_k gegebenen Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0, \ldots$ umgekehrt die ξ_k durch die q_k in völlig bestimmter Weise ausgedrückt werden. Diese Ausdrücke enthalten die p_k garnicht. Dagegen sind die v_k Funktionen der q_k und p_k und durch die Gleichungen (1) und (2) bestimmt. Nach diesen Bemerkungen differentiiere man (1) nach p_i; dann ergibt sich:

$$(4) \qquad \delta q_i = \frac{\partial v_1}{\partial p_i} \delta \xi_1 + \frac{\partial v_2}{\partial p_i} \delta \xi_2 + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i} \delta \xi_\mu .$$

Aus dieser Gleichung und aus den ebenfalls nach p_i differentiierten Gleichungen (2) gewinnen wir die folgenden Gleichungen, deren Anzahl μ ist, und aus denen die Werte von $\frac{\partial v_1}{\partial p_i}, \frac{\partial v_2}{\partial p_i}, \ldots, \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}$ bestimmt werden können:

$$(5)\quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_1}, \\ 0 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_2} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_m} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_m} + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_m}, \\ 0 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial v_1} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial v_\mu}, \\ 0 = \frac{\partial v_1}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial v_1} + \frac{\partial v_2}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial v_\mu}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Von solchen linearen Gleichungen bekommen wir m Systeme, indem wir für i die Zahlen $1, 2, \ldots, m$ setzen. Diese Systeme wollen wir bezüglich mit

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial q_1}, \frac{\partial \xi_k}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \xi_k}{\partial q_m}$$

multiplizieren und nach geschehener Multiplikation dle Addition vornehmen. Wir wollen ferner folgende Bezeichnungen anwenden, wobei k und k' als verschieden angenommen werden:

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_1}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_1} + \frac{\partial \xi_k}{\partial q_2}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \xi_k}{\partial q_m}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_m} = k_{k'}, \\ \frac{\partial \xi_k}{\partial q_1}\frac{\partial v_k}{\partial p_1} + \frac{\partial \xi_k}{\partial q_2}\frac{\partial v_k}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \xi_k}{\partial q_m}\frac{\partial v_k}{\partial p_m} = 1 + k_k. \end{cases}$$

Dann finden wir:

$$
(7)\quad \begin{cases}
0 = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} k_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} k_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_1} k_\mu , \\
0 = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_2} k_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_2} k_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_2} k_\mu , \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
0 = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_m} k_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_m} k_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_m} k_\mu , \\
-\frac{\partial A}{\partial v_k} = \frac{\partial A}{\partial v_1} k_1 + \frac{\partial A}{\partial v_2} k_2 + \cdots + \frac{\partial A}{\partial v_\mu} k_\mu , \\
-\frac{\partial B}{\partial v_k} = \frac{\partial B}{\partial v_1} k_1 + \frac{\partial B}{\partial v_2} k_2 + \cdots + \frac{\partial B}{\partial v_\mu} k_\mu , \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{cases}
$$

Die Auflösung dieser Gleichungen läßt sich zurückführen auf die anderer, deren Anzahl nur $\mu - m$ ist, also gerade so groß wie die der Bedingungsgleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$, ... Man hat nämlich:

$$
(8)\quad \begin{cases}
k_1 = \lambda_1^{(k)} \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \lambda_2^{(k)} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} + \cdots , \\
k_2 = \lambda_1^{(k)} \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + \lambda_2^{(k)} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} + \cdots , \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
k_\mu = \lambda_1^{(k)} \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} + \lambda_2^{(k)} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu} + \cdots ,
\end{cases}
$$

wenn man die Multiplikatoren $\lambda_1^{(k)}$, $\lambda_2^{(k)}$, ..., deren Anzahl $\mu - m$ ist, durch die Gleichungen bestimmt:

$$
(9)\quad \begin{cases}
-\frac{\partial A}{\partial v_k} = a_1 \lambda_1^{(k)} + a_2 \lambda_2^{(k)} + \cdots , \\
-\frac{\partial B}{\partial v_k} = b_1 \lambda_1^{(k)} + b_2 \lambda_2^{(k)} + \cdots , \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ;
\end{cases}
$$

dabei ist

$$(10)\begin{cases} a_1 = \dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial A}{\partial v_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial A}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial A}{\partial v_\mu}, \\ a_2 = b_1 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial A}{\partial v_1} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial A}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial A}{\partial v_\mu} \\ \qquad\quad = \dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial B}{\partial v_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial B}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial B}{\partial v_\mu}, \\ \quad\; b_2 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial B}{\partial v_1} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial B}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial B}{\partial v_\mu}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Gleichheit der Koeffizienten a_2 und b_1 ergibt sich leicht aus den in § 40 (2) angegebenen Ausdrücken A und B. Man findet nämlich für beide denselben Wert

$$a_2 = b_1 = \sum_{k,k'} \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{k'}}\frac{\partial^2 H}{\partial v_k \partial v_{k'}},$$

wobei k und k' die Werte $1, 2, \ldots, \mu$ beigelegt werden. Allgemein sind die linearen Gleichungen (9), auf deren Auflösung die Ermittelung von $k_1, k_2, \ldots, k_\mu$ reduziert ist, so beschaffen, daß die Vertikal- und die Horizontalreihen der Koeffizienten dieselben sind. Diese Koeffizienten hängen überdies nur von den Funktionen F, Φ, ... ab und nicht von dem Index k; mit dem Index k sind jedoch die linken Seiten der Gleichungen (9) behaftet. Setzt man also

$$(11)\begin{cases} -\lambda_1^{(k)} = \Delta_{1,1}\dfrac{\partial A}{\partial v_k} + \Delta_{1,2}\dfrac{\partial B}{\partial v_k} + \cdots, \\ -\lambda_2^{(k)} = \Delta_{2,1}\dfrac{\partial A}{\partial v_k} + \Delta_{2,2}\dfrac{\partial B}{\partial v_k} + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

so gewinnt man m Systeme ebensolcher Formeln, indem man k die Werte $1, 2, \ldots, m$ beilegt und die Koeffizienten Δ ungeändert läßt. Übrigens ist nach einem bekannten algebraischen Theorem

$$\Delta_{a,b} = \Delta_{b,a},$$

d. h. auch in den Gleichungen (11) sind die Horizontalreihen der Koeffizienten dieselben wie die Vertikalreihen.

Über die Bestimmung der zweiten Summe.

§ 42. Von den beiden einfachen Summen

$$\sum_i \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}, \quad \sum_i\left(\frac{\partial v_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} - \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i}\frac{\partial v_k}{\partial p_i}\right),$$

deren Werte, wie wir in § 40 sahen, zu ermitteln waren, habe ich die eine im Obigen bestimmt, oder ich habe sie wenigstens auf andere Größen $\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \ldots$ zurückgeführt, die durch Auflösung von $\mu - m$ linearen Gleichungen gefunden werden. Nun wollen wir die andere einfache Summe

$$\sum_i\left(\frac{\partial v_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} - \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i}\frac{\partial v_k}{\partial p_i}\right)$$

ermitteln, deren Ausdruck etwas verwickelter wird.

Nehmen wir an, daß durch Auflösung der μ linearen Gleichungen

$$(12)\quad \begin{cases} M_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1}u_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_1}u_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_1}u_\mu, \\ M_2 = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_2}u_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_2}u_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_2}u_\mu, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ M_m = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_m}u_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_m}u_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_m}u_\mu, \\ N_1 = \frac{\partial A}{\partial v_1}u_1 + \frac{\partial A}{\partial v_2}u_2 + \cdots + \frac{\partial A}{\partial v_\mu}u_\mu, \\ N_2 = \frac{\partial B}{\partial v_1}u_1 + \frac{\partial B}{\partial v_2}u_2 + \cdots + \frac{\partial B}{\partial v_\mu}u_\mu, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{cases}$$

für die Unbekannten $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ folgende Werte erhalten werden:

$$\begin{aligned} u_1 &= C_{1,1}M_1 + C_{1,2}M_2 + \cdots + C_{1,m}M_m + D_{1,1}N_1 + D_{1,2}N_2 + \cdots, \\ u_2 &= C_{2,1}M_1 + C_{2,2}M_2 + \cdots + C_{2,m}M_m + D_{2,1}N_1 + D_{2,2}N_2 + \cdots, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ u_\mu &= C_{\mu,1}M_1 + C_{\mu,2}M_2 + \cdots + C_{\mu,m}M_m + D_{\mu,1}N_1 + D_{\mu,2}N_2 + \cdots. \end{aligned}$$

Wenn in den Gleichungen (12) $M_i = 1$ gesetzt wird, die übrigen $M_1, M_2, \ldots, M_m$ außer M_i aber verschwinden, so werden jene Gleichungen dieselben wie die Gleichungen (5), aus denen die Werte der $\frac{\partial v_1}{\partial p_i}, \frac{\partial v_2}{\partial p_i}, \ldots, \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i}$ zu entnehmen sind. Es wird somit

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_i} = C_{1,i}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial p_i} = C_{2,i}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial v_\mu}{\partial p_i} = C_{\mu,i}$$

oder allgemein

$$\frac{\partial v_k}{\partial p_i} = C_{k,i}.$$

Man erhält also durch Auflösung der Gleichungen (12) für die Unbekannten $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ folgende Werte:

$$(13)\begin{cases} u_1 = \frac{\partial v_1}{\partial p_1} M_1 + \frac{\partial v_1}{\partial p_2} M_2 + \cdots + \frac{\partial v_1}{\partial p_m} M_m + D_{1,1} N_1 + D_{1,2} N_2 + \cdots, \\ u_2 = \frac{\partial v_2}{\partial p_1} M_1 + \frac{\partial v_2}{\partial p_2} M_2 + \cdots + \frac{\partial v_2}{\partial p_m} M_m + D_{2,1} N_1 + D_{2,2} N_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_\mu = \frac{\partial v_\mu}{\partial p_1} M_1 + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_2} M_2 + \cdots + \frac{\partial v_\mu}{\partial p_m} M_m + D_{\mu,1} N_1 + D_{\mu,2} N_2 + \cdots. \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir die beiden Gleichungen, die aus (1) in § 40 folgen,

$$p_i = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i},$$
$$p_{i'} = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_{i'}} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_{i'}} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_{i'}}$$

differentiieren, und zwar die erste nach $q_{i'}$, die zweite nach q_i. Das dürfen wir, weil nach Einsetzung der Werte der ξ_k, v_k, ausgedrückt durch die p_k, q_k, jene Gleichungen Identitäten werden müssen. Wenn man die Differentiation ausführt, so geben die linken Seiten Null, da sie von den $q_i, q_{i'}$ frei sind. Auf der rechten Seite tritt beide Male das Aggregat auf

$$v_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial q_i \partial q_{i'}} + v_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial q_i \partial q_{i'}} + \cdots + v_\mu \frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial q_i \partial q_{i'}}.$$

Setzen wir die beiden verschwindenden Ausdrücke einander gleich und werfen das gemeinsame Aggregat fort, so gewinnen wir:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial q_i}\dfrac{\partial v_1}{\partial q_{i'}} + \dfrac{\partial \xi_2}{\partial q_i}\dfrac{\partial v_2}{\partial q_{i'}} + \cdots + \dfrac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}\dfrac{\partial v_\mu}{\partial q_{i'}} \\ = \dfrac{\partial \xi_1}{\partial q_{i'}}\dfrac{\partial v_1}{\partial q_i} + \dfrac{\partial \xi_2}{\partial q_{i'}}\dfrac{\partial v_2}{\partial q_i} + \cdots + \dfrac{\partial \xi_\mu}{\partial q_{i'}}\dfrac{\partial v_\mu}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir m Gleichungen, indem wir i' die Werte $1, 2, \ldots, m$ beilegen. Von diesen Gleichungen ist eine, nämlich die dem Werte $i' = i$ entsprechende, sogar eine Identität. Differentiieren wir ferner die Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, ... nach q_i, so erhalten wir:

$$(15)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial A}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial q_i} - \dfrac{\partial A}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial \xi_2}{\partial q_i} - \cdots - \dfrac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i} \\ = \dfrac{\partial A}{\partial v_1}\dfrac{\partial v_1}{\partial q_i} + \dfrac{\partial A}{\partial v_2}\dfrac{\partial v_2}{\partial q_i} + \cdots + \dfrac{\partial A}{\partial v_\mu}\dfrac{\partial v_\mu}{\partial q_i}, \\ -\dfrac{\partial B}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial q_i} - \dfrac{\partial B}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial \xi_2}{\partial q_i} - \cdots - \dfrac{\partial B}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i} \\ = \dfrac{\partial B}{\partial v_1}\dfrac{\partial v_1}{\partial q_i} + \dfrac{\partial B}{\partial v_2}\dfrac{\partial v_2}{\partial q_i} + \cdots + \dfrac{\partial B}{\partial v_\mu}\dfrac{\partial v_\mu}{\partial q_i}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Setzen wir

$$M_{i'} = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i}\frac{\partial v_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i}\frac{\partial v_2}{\partial q_{i'}} + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}\frac{\partial v_\mu}{\partial q_{i'}}$$

und außerdem

$$N_1^{(i)} = -\frac{\partial A}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} - \cdots - \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i},$$

$$N_2^{(i)} = -\frac{\partial B}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} - \cdots - \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so stimmt das System der m Gleichungen (14) unter Hinzunahme des Gleichungssystems (15) mit den Gleichungen (12) überein; dabei sind die μ Größen $\dfrac{\partial v_1}{\partial q_i}, \dfrac{\partial v_2}{\partial q_i}, \ldots, \dfrac{\partial v_\mu}{\partial q_i}$ als die

Unbekannten $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ anzusehen. Hieraus gewinnen wir nach den Formeln (13)

$$\frac{\partial v_k}{\partial q_i} = u_k = \frac{\partial v_k}{\partial p_1} M_1 + \frac{\partial v_k}{\partial p_2} M_2 + \cdots + \frac{\partial v_k}{\partial p_m} M_m + D_{k,1} N_1^{(i)} + D_{k,2} N_2^{(i)} + \cdots$$

Setzen wir

$$\frac{\partial v_{k'}}{\partial q_1} \frac{\partial v_k}{\partial p_1} + \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_2} \frac{\partial v_k}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_m} \frac{\partial v_k}{\partial p_m} = (k')_k, \tag{16}$$

so daß $(k)_{k'} - (k')_k$ die zweite in § 40 zur Ermittelung vorgelegte Summe ist. Wenden wir diese Bezeichnung an, so läßt sich die obige Gleichung folgendermaßen schreiben:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} (1)_k + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} (2)_k + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i} (\mu)_k \\ + D_{k,1} N_1^{(i)} + D_{k,2} N_2^{(i)} + \cdots \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Führt man die Werte von $N_1^{(i)}, N_2^{(i)}, \ldots$ ein und setzt

$$\left\{ \begin{aligned} w_1^{(k)} &= (1)_k - D_{k,1} \frac{\partial A}{\partial \xi_1} - D_{k,2} \frac{\partial B}{\partial \xi_1} - \cdots, \\ w_2^{(k)} &= (2)_k - D_{k,1} \frac{\partial A}{\partial \xi_2} - D_{k,2} \frac{\partial B}{\partial \xi_2} - \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_\mu^{(k)} &= (\mu)_k - D_{k,1} \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu} - D_{k,2} \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu} - \cdots, \end{aligned} \right. \tag{18}$$

so geht die obige Gleichung in folgende über:

$$\frac{\partial v_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} w_1^{(k)} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} w_2^{(k)} + \cdots + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i} w_\mu^{(k)}. \tag{19}$$

Aus ihr erhalten wir m Formeln, indem wir i die Werte $1, 2, \ldots, m$ beilegen. Um aus diesen wieder ein System linearer Gleichungen von der Form der Gleichungen (12) zu erhalten, wollen wir noch den Wert der Ausdrücke

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\partial A}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \frac{\partial A}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)}, \\ N_2 &= \frac{\partial B}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \frac{\partial B}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

ermitteln. Das kann auf folgende Weise geschehen.

§ 43. Man hat

$$\frac{\partial A}{\partial v_1}(1)_k + \frac{\partial A}{\partial v_2}(2)_k + \cdots$$
$$+ \frac{\partial A}{\partial v_\mu}(\mu)_k = \sum_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}}(k')_k = \sum_{k'}\sum_{i} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}} \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial v_k}{\partial p_i}.$$

Differentiiert man aber die Gleichung $A = 0$ nach q_i, so kommt

$$\sum_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}} \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i} = -\sum_{k'} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_i},$$

mithin ist

$$\sum_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}}(k')_k = -\frac{\partial A}{\partial \xi_k} - \sum_{k'} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} k'_k.$$

Nun war aber

$$k'_k = \lambda_1^{(k')} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} + \lambda_2^{(k')} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} + \cdots$$

Setzt man also

$$(20) \quad \begin{cases} A_1 = \sum_{k'} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} \lambda_1^{(k')} = \frac{\partial A}{\partial \xi_1}\lambda_1^{(1)} + \frac{\partial A}{\partial \xi_2}\lambda_1^{(2)} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\lambda_1^{(\mu)}, \\ A_2 = \sum_{k'} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} \lambda_2^{(k')} = \frac{\partial A}{\partial \xi_1}\lambda_2^{(1)} + \frac{\partial A}{\partial \xi_2}\lambda_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\lambda_2^{(\mu)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

so wird

$$\sum_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}}(k')_k = -\frac{\partial A}{\partial \xi_k} - A_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_k} - A_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} - \cdots.$$

Setzt man ebenso

$$(21) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{\partial B}{\partial \xi_1}\lambda_1^{(1)} + \frac{\partial B}{\partial \xi_2}\lambda_1^{(2)} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu}\lambda_1^{(\mu)}, \\ B_2 = \frac{\partial B}{\partial \xi_1}\lambda_2^{(1)} + \frac{\partial B}{\partial \xi_2}\lambda_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu}\lambda_2^{(\mu)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

so wird

$$\sum_{k'} \frac{\partial B}{\partial v_{k'}}(k')_k = -\frac{\partial B}{\partial \xi_k} - B_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_k} - B_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} - \cdots.$$

Ähnliche Gleichungen erhält man für jede Bedingungsgleichung.

Es sei

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial A}{\partial v_1}+\dfrac{\partial A}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial A}{\partial v_2}+\cdots+\dfrac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial A}{\partial v_\mu}=\alpha_1, \\ \dfrac{\partial A}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial B}{\partial v_1}+\dfrac{\partial A}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial B}{\partial v_2}+\cdots+\dfrac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial B}{\partial v_\mu}=\alpha_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

ferner

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial A}{\partial v_1}+\dfrac{\partial B}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial A}{\partial v_2}+\cdots+\dfrac{\partial B}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial A}{\partial v_\mu}=\beta_1, \\ \dfrac{\partial B}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial B}{\partial v_1}+\dfrac{\partial B}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial B}{\partial v_2}+\cdots+\dfrac{\partial B}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial B}{\partial v_\mu}=\beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

usw. Multiplizieren wir dann die Gleichungen (9) in § 41 mit $\dfrac{\partial A}{\partial \xi_k}$, $\dfrac{\partial B}{\partial \xi_k}$, $\cdots$ und summieren in bezug auf den Index k, so gewinnen wir Systeme linearer Gleichungen, durch die die Werte von $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$, bestimmt werden:

$$(24)\quad \begin{cases} -\alpha_1 = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \cdots, \\ -\alpha_2 = b_1 A_1 + b_2 A_2 + \cdots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ -\beta_1 = a_1 B_1 + a_2 B_2 + \cdots, \\ -\beta_2 = b_1 B_1 + b_2 B_2 + \cdots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Jedes System enthält so viele lineare Gleichnngen und so viele Unbekannte, als Bedingungsgleichungen $F=0$, $\Phi=0, \dots$ zwischen den Größen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu$ gegeben sind. Durch Auflösung gewinnen wir die Werte von $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$:

$$(25)\quad \begin{cases} -A_1 = \mathcal{A}_{1,1}\alpha_1 + \mathcal{A}_{1,2}\alpha_2 + \cdots, \\ -A_2 = \mathcal{A}_{2,1}\alpha_1 + \mathcal{A}_{2,2}\alpha_2 + \cdots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ -B_1 = \mathcal{A}_{1,1}\beta_1 + \mathcal{A}_{1,2}\beta_2 + \cdots, \\ -B_2 = \mathcal{A}_{2,1}\beta_1 + \mathcal{A}_{2,2}\beta_2 + \cdots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

und in diesen Formeln sind die Koeffizienten $\mathcal{A}_{i,i'}$ dieselben wie in (11), § 41. Bevor ich weiter gehe, müssen auch die

Werte der D auf die Größen $\mathit{\Delta}$ zurückgeführt werden. Zu diesem Zweck setze ich in den Gleichungen (12)

$$u_1 = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \quad u_2 = \frac{\partial F}{\partial \xi_2}, \ \ldots, \ u_\mu = \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} &M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \ \ldots, \ M_m = 0, \\ &N_1 = a_1, \quad N_2 = b_1, \ \ldots, \end{aligned}$$

und nach Einsetzung dieser Werte erhält man aus den Gleichungen (13):

$$(26) \qquad \frac{\partial F}{\partial \xi_k} = a_1 D_{k,1} + b_1 D_{k,2} + \cdots$$

Ebenso wird

$$(27) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} = a_2 D_{k,1} + b_2 D_{k,2} + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Löst man die Gleichungen (26), (27) auf, so ergeben sich die gesuchten Werte:

$$(28) \qquad \left\{ \begin{array}{l} D_{k,1} = \mathit{\Delta}_{1,1} \dfrac{\partial F}{\partial \xi_k} + \mathit{\Delta}_{1,2} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} + \cdots, \\ D_{k,2} = \mathit{\Delta}_{2,1} \dfrac{\partial F}{\partial \xi_k} + \mathit{\Delta}_{2,2} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Setzt man diese Werte und zugleich die Werte (25) von $A_1, A_2, \ldots$ in die Gleichung

$$\sum_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}} (k')_k = - \frac{\partial A}{\partial \xi_k} - A_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_k} - A_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} - \cdots$$

ein und erinnert sich an unsere frühere Bemerkuug in § 41, wonach $\mathit{\Delta}_{a,b} = \mathit{\Delta}_{b,a}$ ist, so bekommt man

$$(29) \quad \sum_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}} (k')_k = - \frac{\partial A}{\partial \xi_k} + D_{k,1} \alpha_1 + D_{k,2} \alpha_2 + \cdots,$$

und ebenso wird

$$(30) \quad \sum_{k'} \frac{\partial B}{\partial v_{k'}} (k')_k = - \frac{\partial B}{\partial \xi_k} + D_{k,1} \beta_1 + D_{k,2} \beta_2 + \cdots.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man aus (18) den Wert

$$w_{k'}^{(k)} = (k')_k - D_{k,1}\frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} - D_{k,2}\frac{\partial B}{\partial \xi_{k'}} - \cdots$$

einsetzt,

$$\sum_{k'} \frac{\partial A}{\partial v_{k'}} w_{k'}^{(k)} = \frac{\partial A}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \frac{\partial A}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)}$$
$$= -\frac{\partial A}{\partial \xi_k} + D_{k,1}\alpha_1 + D_{k,2}\alpha_2 + \cdots$$
$$- D_{k,1}\alpha_1 - D_{k,2}\beta_1 - \cdots,$$

$$\sum_{k'} \frac{\partial B}{\partial v_{k'}} w_{k'}^{(k)} = \frac{\partial B}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \frac{\partial B}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)}$$
$$= -\frac{\partial B}{\partial \xi_k} + D_{k,1}\beta_1 + D_{k,2}\beta_2 + \cdots$$
$$- D_{k,1}\alpha_2 - D_{k,2}\beta_2 - \cdots,$$

. . . .

Wir wollen festsetzen

$$(31) \quad \begin{cases} [A,\, B]' = \dfrac{\partial A}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial B}{\partial v_1} + \dfrac{\partial A}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial B}{\partial v_2} + \cdots + \dfrac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\dfrac{\partial B}{\partial v_\mu} \\ \qquad - \dfrac{\partial A}{\partial v_1}\dfrac{\partial B}{\partial \xi_1} - \dfrac{\partial A}{\partial v_2}\dfrac{\partial B}{\partial \xi_2} - \cdots - \dfrac{\partial A}{\partial v_\mu}\dfrac{\partial B}{\partial \xi_\mu}, \end{cases}$$

was für Funktionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ auch A und B sein mögen. Bei dieser Bezeichnung habe ich oben einen Strich angefügt, um den Ausdruck von dem in bezug auf die Veränderlichen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ ebenso gebildeten zu unterscheiden.

Wendet man diese neue Bezeichnungsweise auf die obigen Formeln an, so gewinnt man die Ausdrücke:

$$(32) \quad \begin{cases} N_1 = \dfrac{\partial A}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \dfrac{\partial A}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \dfrac{\partial A}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)} \\ \quad = -\dfrac{\partial A}{\partial \xi_k} + D_{k,2}[A,\, B]' + \cdots, \\ N_2 = \dfrac{\partial B}{\partial v_1} w_1^{(k)} + \dfrac{\partial B}{\partial v_2} w_2^{(k)} + \cdots + \dfrac{\partial B}{\partial v_\mu} w_\mu^{(k)} \\ \quad = -\dfrac{\partial B}{\partial \xi_k} + D_{k,1}[B,\, A]' + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Diese Gleichungen, verbunden mit den m Gleichungen, die aus (19) erhalten werden, indem man i die Werte $1, 2, \ldots, m$ beilegt, liefern ein System linearer Gleichungen, die wie (12) aussehen.

Ihre Auflösung liefert nach (13)

$$w_{k'}^{(k)} = (k)_{k'} + D_{k',1} N_1 + D_{k',2} N_2 + \cdots$$

Daraus ergibt sich, wenn man für $N_1, N_2, \ldots$ die obigen Werte (32) einsetzt und aus (18) den Wert

$$w_{k'}^{(k)} = (k')_k - D_{k,1} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} - D_{k,2} \frac{\partial B}{\partial \xi_{k'}} - \cdots,$$

die zweite in § 40 zur Ermittelung vorgelegte Summe:

$$(33) \quad \begin{cases} (k')_k - (k)_{k'} = D_{k,1} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} - D_{k',1} \frac{\partial A}{\partial \xi_k} + D_{k,2} \frac{\partial B}{\partial \xi_{k'}} - D_{k',2} \frac{\partial B}{\partial \xi_k} + \cdots \\ \qquad + (D_{k',1} D_{k,2} - D_{k,1} D_{k',2}) [A, B]' + \cdots. \end{cases}$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck. Wenn man darin für die D die Werte (28) einsetzt, so sind die Veränderlichen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$, wie es verlangt wurde, gänzlich beseitigt. Ich bemerke, daß in der Formel (33) ebensoviele Glieder

$$(D_{k',1} D_{k,2} - D_{k,1} D_{k',2}) [A, B]'$$

vorkommen, als es Kombinationen je zweier Bedingungsgleichungen gibt, d. h. $\frac{1}{2}(\mu - m)(\mu - m - 1)$. Gibt es also nur eine einzige Bedingungsgleichung, so hat man keine solchen Glieder. In diesem Falle hat man, wenn $F = 0$ die Bedingungsgleichung ist:

$$a k_{k'} = - \frac{\partial F}{\partial \xi_{k'}} \frac{\partial A}{\partial v_k},$$

$$a \{(k')_k - (k)_{k'}\} = \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial A}{\partial \xi_{k'}} - \frac{\partial F}{\partial \xi_{k'}} \frac{\partial A}{\partial \xi_k},$$

wobei

$$A = \sum \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial H}{\partial v_k}, \quad a = \sum \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial F}{\partial \xi_{k'}} \frac{\partial^2 H}{\partial v_k \partial v_{k'}}$$

ist; in der ersten Summe werden dem k, in der zweiten k und k' die Werte $1, 2, \ldots, \mu$ beigelegt.

Die obigen Formeln werden auf den Fall angewandt, daß $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ die rechtwinkligen Koordinaten materieller Punkte bedeuten.

§ 44. Es sei $\mu = 3n$, und zugleich mögen die Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ die $3n$ rechtwinkligen Koordinaten der bewegten Punkte bedeuten. Die Masse des Punktes, dessen eine Koordinate ξ_k ist, heiße m_k, so daß unter den Größen m_1, $m_2, \ldots, m_\mu$ immer die drei auf denselben Punkt bezüglichen einander gleich sind. Bezeichnet dann U eine Funktion der ξ_k allein, die von den ξ'_k frei ist, und T die lebendige Kraft, so wird sein

$$H = T - U = \tfrac{1}{2}\sum m_k \xi'_k \xi'_k - U,$$

$$v_k = \frac{\partial T}{\partial \xi'_k} = m_k \xi'_k,$$

ferner

$$A = \sum \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \xi'_k, \quad B = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} \xi'_k, \quad \cdots,$$

$$a_1 = \sum \frac{1}{m_k}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_k}\right)^2, \quad a_2 = b_1 = \sum \frac{1}{m_k} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k},$$

$$b_2 = \sum \frac{1}{m_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}\right)^2, \quad \cdots,$$

$$-m_k \lambda_{k'}^{(k)} = \varDelta_{k',1} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} + \varDelta_{k',2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} + \cdots,$$

$$-m_k k_{k'} = -m_{k'} k'_k = \varDelta_{1,1} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial F}{\partial \xi_{k'}}$$

$$+ \varDelta_{1,2}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{k'}} + \frac{\partial F}{\partial \xi_{k'}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}\right) + \varDelta_{2,2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{k'}} + \cdots$$

. . . .

Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, daß wegen der angegebenen Bedeutung der ξ_k

$$m_k \cdot k_{k'} = m_{k'} \cdot k'_k$$

wird, d. h.

$$\sum_i \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \frac{\partial \xi'_{k'}}{\partial p_i} = \sum_i \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial \xi'_k}{\partial p_i}.$$

Das läßt sich leicht auf folgende Weise einsehen. Es ist

$$\xi'_{k'} = \sum_{i'} \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_{i'}} q'_{i'}, \quad \xi'_k = \sum_{i'} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_{i'}} q'_{i'},$$

mithin

$$\sum_i \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \frac{\partial \xi'_{k'}}{\partial p_i} = \sum_{i,i'} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_{i'}} \frac{\partial q'_{i'}}{\partial p_i},$$

$$\sum_i \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial \xi'_k}{\partial p_i} = \sum_{i,i'} \frac{\partial \xi_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_{i'}} \frac{\partial q'_{i'}}{\partial p_i}.$$

Nun hat man aber

$$q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad q'_{i'} = \frac{\partial H}{\partial p_{i'}},$$

mithin

$$\frac{\partial q'_{i'}}{\partial p_i} = \frac{\partial q'_i}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_{i'}},$$

d. h. der Ausdruck $\frac{\partial q'_{i'}}{\partial p_i}$ bleibt bei Vertauschung von i und i' ungeändert. Folglich geht, wenn man i' für i und i für i' setzt, die eine der beiden hingeschriebenen Doppelsummen in die andere über, d. h. sie sind einander gleich, was zu beweisen war.

Über die Anwendung der Funktionen $\varDelta$ bei der Bestimmung der Lagrangeschen Multiplikatoren.

§ 45. Durch die Größen $\varDelta_{a,b}$, die ich oben benutzt habe, lassen sich auch die *Lagrange*schen Multiplikatoren bestimmen, die zur Bildung der dynamischen Differentialgleichungen dienen, so oft zwischen den Veränderlichen, die die Lage der materiellen Punkte bestimmen, Bedingungsgleichungen bestehen. Um diese Differentialgleichungen zu bilden, wende ich die symbolische Formel (1) in § 37 an. In ihr schreibe ich, damit $q_1, q_2, \ldots, q_m$ immer unabhängige Veränderliche bedeuten, für $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ jetzt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots, v_\mu$. Alsdann lautet jene Gleichung:

$$(1)\quad 0 = \left(\frac{\partial H}{\partial \xi_1} + \frac{dv_1}{dt}\right)\delta\xi_1 + \left(\frac{\partial H}{\partial \xi_2} + \frac{dv_2}{dt}\right)\delta\xi_2 + \cdots + \left(\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} + \frac{dv_\mu}{dt}\right)\delta\xi_\mu.$$

Zwischen den Variationen $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \ldots$ bestehen die Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1}\delta\xi_1 + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\delta\xi_\mu = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\delta\xi_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\delta\xi_\mu = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

wenn wieder $F = 0$, $\Phi = 0$, ... die Bedingungsgleichungen für die Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ sind. Nach der bekannten Regel versehe ich die obigen Gleichungen mit Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, addiere sie zu der Gleichung (1) und setze dann die Faktoren der einzelnen Variationen gleich Null. Auf diese Weise ergeben sich die folgenden Differentialgleichungen zwischen den Veränderlichen $t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots, v_\mu$, wenn man noch die Gleichungen $\xi_i' = \frac{\partial H}{\partial v_i}$ hinzunimmt,

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial v_1}, & \dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi_1} - \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial \xi_1} - \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} - \cdots, \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial v_2}, & \dfrac{dv_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi_2} - \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial \xi_2} - \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} - \cdots, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\xi_\mu}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial v_\mu}, & \dfrac{dv_\mu}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi_\mu} - \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial \xi_\mu} - \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu} - \cdots. \end{cases}$$

Mit diesen Gleichungen sind zu verbinden die Bedingungsgleichungen

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \ldots$$

selbst und die aus ihnen durch Differentiation sich ergebenden

$$A = 0, \quad B = 0, \ldots$$

Differentiieren wir die letztgenannten noch einmal und setzen aus (2) die Werte von $\frac{d\xi_i}{dt}, \frac{dv_i}{dt}$ ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial \xi_1}\frac{\partial H}{\partial v_1} + \frac{\partial A}{\partial \xi_2}\frac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial H}{\partial v_\mu} \\ &-\frac{\partial A}{\partial v_1}\frac{\partial H}{\partial \xi_1} - \frac{\partial A}{\partial v_2}\frac{\partial H}{\partial \xi_2} - \cdots - \frac{\partial A}{\partial v_\mu}\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots, \\ &\frac{\partial B}{\partial \xi_1}\frac{\partial H}{\partial v_1} + \frac{\partial B}{\partial \xi_2}\frac{\partial H}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial B}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial H}{\partial v_\mu} \\ &-\frac{\partial B}{\partial v_1}\frac{\partial H}{\partial \xi_1} - \frac{\partial B}{\partial v_2}\frac{\partial H}{\partial \xi_2} - \cdots - \frac{\partial B}{\partial v_\mu}\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} = b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

wobei $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ dieselben Größen sind wie in § 41 (10). Hieraus gewinnen wir unter Benutzung der in § 43 (31) angegebenen Bezeichnungsweise die folgenden Werte für die Multiplikatoren:

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \varDelta_{1,1}[A, H]' + \varDelta_{1,2}[B, H]' + \cdots, \\ \lambda_2 = \varDelta_{2,1}[A, H]' + \varDelta_{2,2}[B, H]' + \cdots, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Nach § 43 (28) lauten also die dynamischen Differentialgleichungen:

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_1} - D_{1,1}[A, H]' - D_{1,2}[B, H]' - \cdots,$$

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_2} - D_{2,1}[A, H]' - D_{2,2}[B, H]' - \cdots,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{dv_\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} - D_{\mu,1}[A, H]' - D_{\mu,2}[B, H]' - \cdots.$$

Die Multiplikatoren sind jetzt herausgeschafft.

Mit Hilfe der oben gefundenen Summen wird der Ausdruck $[\varphi, \psi]$ gebildet.

§ 46. Die Formel (3) in § 40:

$$[\varphi, \psi] = \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k} \frac{\partial \psi}{\partial v_{k'}} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_{k'}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \right) \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i}$$
$$+ \sum \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} \frac{\partial \psi}{\partial v_{k'}} \left(\frac{\partial v_k}{\partial q_i} \frac{\partial v_{k'}}{\partial p_i} - \frac{\partial v_{k'}}{\partial q_i} \frac{\partial v_k}{\partial p_i} \right)$$

können wir auf Grund der oben (§ 41 (6) und § 42 (16)) benutzten Bezeichnungen so schreiben:

$$(1) \quad \begin{cases} [\varphi, \psi] = \\ \sum\limits_k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k} \frac{\partial \psi}{\partial v_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \right) + \sum\limits_{k,k'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k} \frac{\partial \psi}{\partial v_{k'}} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_{k'}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \right) k_{k'} \\ + \sum\limits_{k,k'} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} \frac{\partial \psi}{\partial v_{k'}} \{(k)_{k'} - (k')_k\}. \end{cases}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, wenn man für $k_{k'}$ und $(k)_{k'} - (k')_k$ die oben gefundenen Werte einsetzt, der von den Veränderlichen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ gänzlich freie Ausdruck für $[\varphi, \psi]$, den wir ermitteln sollten.

Von den Summen, aus denen sich der obige Ausdruck zusammensetzt, will ich die zweite und dritte betrachten und für sie noch folgende Umformungen angeben.

Nach § 41 (8) hat man:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,k'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k} \frac{\partial \psi}{\partial v_{k'}} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_{k'}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \right) k_{k'} \\
&= \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k} \left(k_1 \frac{\partial \psi}{\partial v_1} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial v_2} + \cdots + k_\mu \frac{\partial \psi}{\partial v_\mu} \right) \\
&- \sum_k \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \left(k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + k_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v_2} + \cdots + k_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu} \right) \\
= &\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_1} \frac{\partial \psi}{\partial v_1} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \frac{\partial \psi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial v_\mu} \right) \sum_k \lambda_1^{(k)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k} \\
- &\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \frac{\partial \varphi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu} \right) \sum_k \lambda_1^{(k)} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \\
+ &\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \frac{\partial \psi}{\partial v_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} \frac{\partial \psi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial v_\mu} \right) \sum_k \lambda_2^{(k)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k} \\
- &\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} \frac{\partial \varphi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial v_\mu} \right) \sum_k \lambda_2^{(k)} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

oder auch:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\sum_{k,k'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k} \frac{\partial \psi}{\partial v_{k'}} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_{k'}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \right) k_{k'} \\
&= \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k} \{ \lambda_1^{(k)} [F, \psi]' + \lambda_2^{(k)} [\Phi, \psi]' + \cdots \} \\
&- \sum_k \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k} \{ \lambda_1^{(k)} [F, \varphi]' + \lambda_2^{(k)} [\Phi, \varphi]' + \cdots \}.
\end{aligned} \right.$$

Nach § 43 (33) hat man ferner:

$$(3)\begin{cases} \sum\limits_{k,k'} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}\frac{\partial \psi}{\partial v_{k'}}\{(k')_k - (k)_{k'}\} \\ = \sum\limits_k \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} D_{k,1} \sum\limits_k \frac{\partial \psi}{\partial v_k}\frac{\partial A}{\partial \xi_k} - \sum\limits_k \frac{\partial \psi}{\partial v_k} D_{k,1} \sum\limits_k \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}\frac{\partial A}{\partial \xi_k} \\ + \sum\limits_k \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} D_{k,2} \sum\limits_k \frac{\partial \psi}{\partial v_k}\frac{\partial B}{\partial \xi_k} - \sum\limits_k \frac{\partial \psi}{\partial v_k} D_{k,2} \sum\limits_k \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}\frac{\partial B}{\partial \xi_k} \\ + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ - [A,B]'\left(\sum\limits_k \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} D_{k,1} \sum\limits_k \frac{\partial \psi}{\partial v_k} D_{k,2} - \sum\limits_k \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} D_{k,2} \sum\limits_k \frac{\partial \psi}{\partial v_k} D_{k,1}\right) \\ - \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{cases}$$

Es wird aber nach § 43 (28):

$$\sum_k D_{k,k'}\frac{\partial \varphi}{\partial v_k} = \varDelta_{k',1}\sum_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{\partial \varphi}{\partial v_k} + \varDelta_{k',2}\sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}\frac{\partial \varphi}{\partial v_k} + \cdots,$$

$$\sum_k D_{k,k'}\frac{\partial \psi}{\partial v_k} = \varDelta_{k',1}\sum_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{\partial \psi}{\partial v_k} + \varDelta_{k',2}\sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}\frac{\partial \psi}{\partial v_k} + \cdots,$$

oder:

$$(4)\begin{cases} \sum\limits_k D_{k,k'}\frac{\partial \varphi}{\partial v_k} = \varDelta_{k',1}[F,\varphi]' + \varDelta_{k',2}[\Phi,\varphi]' + \cdots, \\ \sum\limits_k D_{k,k'}\frac{\partial \psi}{\partial v_k} = \varDelta_{k',1}[F,\psi]' + \varDelta_{k',2}[\Phi,\psi]' + \cdots. \end{cases}$$

Wenn wir diese Formeln benutzen und auch die Formeln (11) in § 41 heranziehen, so können wir die Gleichung (2) so schreiben:

$$(5)\begin{cases} \sum\limits_{k,k'}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}\frac{\partial \psi}{\partial v_{k'}} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_{k'}}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_k}\right)k_{k'} \\ = -\sum\limits_k D_{k,1}\frac{\partial \psi}{\partial v_k}\sum\limits_k \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}\frac{\partial A}{\partial v_k} - \sum\limits_k D_{k,2}\frac{\partial \psi}{\partial v_k}\sum\limits_k \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}\frac{\partial B}{\partial v_k} - \cdots \\ \quad + \sum\limits_k D_{k,1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_k}\sum\limits_k \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k}\frac{\partial A}{\partial v_k} + \sum\limits_k D_{k,2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_k}\sum\limits_k \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k}\frac{\partial B}{\partial v_k} + \cdots \end{cases}$$

Setzt man die Formeln (3) und (5) in (1) ein, so ergibt sich:

$$(6)\quad \begin{cases} [\varphi, \psi] - [\varphi, \psi]' = \\ -[\varphi, A]' \sum_k D_{k,1} \frac{\partial \psi}{\partial v_k} - [\varphi, B]' \sum_k D_{k,2} \frac{\partial \psi}{\partial v_k} - \cdots \\ + [\psi, A]' \sum_k D_{k,1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} + [\psi, B]' \sum_k D_{k,2} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} + \cdots \\ + [A, B]' \left(\sum_k D_{k,1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} \sum_k D_{k,2} \frac{\partial \psi}{\partial v_k} - \sum_k D_{k,1} \frac{\partial \psi}{\partial v_k} \sum_k D_{k,2} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} \right) \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{cases}$$

Diese allgemeine Formel war ziemlich schwer zu ermitteln.

Der gefundene Ausdruck wird durch verschiedene seiner Eigenschaften verfiziert.

§ 47. Die Größe, durch die ich im vorigen Paragraphen $[\varphi, \psi]$ ausgedrückt habe, will ich mit

$$(1)\quad \begin{cases} \Xi = [\varphi, \psi]' - [\varphi, A]' \sum_k D_{k,1} \frac{\partial \psi}{\partial v_k} - [\varphi, B]' \sum_k D_{k,2} \frac{\partial \psi}{\partial v_k} - \cdots \\ \qquad + [\psi, A]' \sum_k D_{k,1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} + [\psi, B]' \sum_k D_{k,2} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} + \cdots \\ \qquad + [A, B]' \left(\sum_k D_{k,1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} \sum_k D_{k,2} \frac{\partial \psi}{\partial v_k} - \sum_k D_{k,1} \frac{\partial \psi}{\partial v_k} \sum_k D_{k,2} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} \right) \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{cases}$$

bezeichnen. Sie muß verschiedene besondere Eigenschaften genießen, die zugleich verschiedene Bestätigungen des gefundenen Ausdrucks liefern. Zunächst darf ihr Wert sich nicht ändern, wenn an Stelle der Funktionen φ, ψ gesetzt wird

$$\varphi + \lambda F + \mu \Phi + \cdots + \lambda' A + \mu' B + \cdots,$$
$$\psi + \lambda_1 F + \mu_1 \Phi + \cdots + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots,$$

wobei λ, μ, λ', μ', λ_1, μ_1, λ_1', μ_1', ... irgend welche Funktionen von ξ_i, v_i bezeichnen. Denn der Wert der Größe $[\varphi, \psi]$, der, wie wir fanden, der Ausdruck Ξ gleich ist, wird durch diese Änderung in keiner Weise berührt. Diese Eigenschaft

des Ausdrucks Ξ wird si[illegible]cht aus seinem Bildungsgesetz ergeben, wenn wir zuvor fo[illegible] [illegible] Satz beweisen: Der Ausdruck Ξ verschwindet, [illegible] durch eine der Funktionen $F, \Phi, \ldots; A, B, \ldots$ ersetzt, was auch die andere Funktion sein mag. Der Satz braucht nur bewiesen zu werden für den Fall, daß $\varphi = F$ oder $\varphi = A$ gesetzt wird, während die Funktion ψ willkürlich bleibt. Denn die übrigen Fälle, in denen φ den Funktionen $\Phi, \ldots, B, \ldots$ gleichgesetzt wird, oder φ willkürlich bleibt, und ψ irgend einer der Funktionen $F, \Phi, \ldots, A, B, \ldots$ gleich gemacht wird, lassen sich in genau derselben Weise behandeln.

Setzt man $\varphi = F$, so verschwinden die Glieder

$$\sum_k D_{k,1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}, \quad \sum_k D_{k,2} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}, \quad \ldots,$$

da die Funktion F nur die ξ_k und nicht die Größen v_k enthält. Wir erhalten mithin, wenn $\varphi = F$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \Xi &= [F, \psi]' - [F, A]' \sum_k D_{k,1} \frac{\partial \psi}{\partial v_k} - [F, B]' \sum_k D_{k,2} \frac{\partial \psi}{\partial v_k} - \cdots \\ &= [F, \psi]' - \sum_k \{[F, A]' D_{k,1} + [F, B]' D_{k,2} + \cdots\} \frac{\partial \psi}{\partial v_k}. \end{aligned}$$

Nach den Formeln (26), (27) in § 43, in denen

$$\begin{aligned} a_1 &= [F, A]', \quad b_1 = [F, B]', \ldots, \\ a_2 &= [\Phi, A]', \quad b_2 = [\Phi, B]', \ldots \end{aligned}$$

ist usw., hat man:

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \xi_k} = [F, A]' D_{k,1} + [F, B]' D_{k,2} + \cdots, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} = [\Phi, A]' D_{k,1} + [\Phi, B]' D_{k,2} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Formeln geht der Ausdruck für Ξ in folgenden über:

$$\Xi = [F, \psi]' - \sum_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \psi}{\partial v_k} = 0.$$

Es verschwindet also Ξ, wenn [illegible] man $\varphi = F$ setzt, und das war zu beweisen. Auf dieselb[illegible] zeigt man, daß Ξ verschwindet, wenn man [illegible] oder $\psi = F$ oder $\psi = \Phi$.

Setzen wir nunmehr in dem Ausdruck (1) $\varphi = A$. Dann sind vor allem die Werte der Größen

$$E_1 = \sum_k D_{k,1} \frac{\partial A}{\partial v_k}, \quad E_2 = \sum_k D_{k,2} \frac{\partial A}{\partial v_k}, \quad \cdots$$

zu suchen. Um sie zu finden, multipliziere man die Gleichungen (2) mit $\frac{\partial A}{\partial v_k}$ und führe, nachdem man für k die Werte $1, 2, \ldots, \mu$ gesetzt hat, bei den einzelnen Gleichungen die Summation aus. Dann kommt:

$$\sum_k \frac{\partial A}{\partial v_k} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} = [F, A]' = [F, A]' E_1 + [F, B]' E_2 + \cdots,$$

$$\sum_k \frac{\partial A}{\partial v_k} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} = [\Phi, A]' = [\Phi, A]' E_1 + [\Phi, B]' E_2 + \cdots,$$

. . . .

Daraus erhält man:

$$(3) \quad E_1 = \sum_k D_{k,1} \frac{\partial A}{\partial v_k} = 1, \quad E_2 = \sum_k D_{k,2} \frac{\partial A}{\partial v_k} = 0, \quad \cdots,$$

und wenn die Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$, ... mehr als zwei sind, so verschwinden auch alle übrigen ähnlichen Ausdrücke $\sum_k D_{k,3} \frac{\partial A}{\partial v_k}$, $\sum_k D_{k,4} \frac{\partial A}{\partial v_k}$, $\cdots$. Ebenso zeigt man, daß

$$\sum D_{k,2} \frac{\partial B}{\partial v_k} = 1$$

ist, während die übrigen Größen $\sum_k D_{k,1} \frac{\partial B}{\partial v_k}$, $\sum_k D_{k,3} \frac{\partial B}{\partial v_k}$, $\cdots$ verschwinden. Aus den Gleichungen (3) ersehen wir, daß Ξ verschwindet, wenn $\varphi = A$ gesetzt wird; denn es ist $[A, A]' = 0$, $[A, \psi]' + [\psi, A]' = 0$, und man erkennt leicht, daß nach Ausführung dieser Substitution nicht nur die mit $[A, B]'$ multiplizierten Glieder verschwinden, sondern, wenn mehr als zwei Bedingungsgleichungen gegeben sind, auch die mit ähnlichen Ausdrücken multiplizierten Glieder; die Anzahl dieser Ausdrücke ist dieselbe wie die der Kombinationen je zweier

Bedingungsgleichungen. Auf dieselbe Weise zeigt man, daß Ξ verschwindet, wenn man $\varphi = B$ setzt, oder wenn man $\psi = A$ oder $\psi = B$ setzt.

Wir wollen nun den Ausdruck (1) mit

$$\Xi = [\varphi, \psi]''$$

bezeichnen und

$$\begin{aligned}\varphi^0 &= \varphi + \lambda F + \mu \Phi + \cdots + \lambda' A + \mu' B + \cdots,\\ \psi^0 &= \psi + \lambda_1 F + \mu_1 \Phi + \cdots + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots\end{aligned}$$

setzen. Aus dem Bildungsgesetz des Ausdrucks $[\varphi, \psi]''$ ergibt sich, wenn man nach Ausführung der partiellen Differentiationen die mit den verschwindenden Größen F, Φ, ..., A, B, ... multiplizierten Ausdrücke fortwirft,

$$\begin{aligned}[\varphi^0, \psi^0]'' &= [\varphi^0, \psi + \lambda_1 F + \mu_1 \Phi + \cdots + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots]''\\ &= [\varphi_0, \psi]'' + \lambda_1 [\varphi^0, F]'' + \mu_1 [\varphi^0, \Phi]'' + \cdots\\ &\qquad + \lambda_1' [\varphi^0, A]'' + \mu_1' [\varphi^0, B]'' + \cdots.\end{aligned}$$

Ich habe aber eben bewiesen, daß man, was auch die Funktion φ^0 sein mag,

$$\begin{aligned}&[\varphi^0, F]'' = 0, \quad [\varphi^0, \Phi]'' = 0, \ldots,\\ &[\varphi^0, A]'' = 0, \quad [\varphi^0, B]'' = 0, \ldots\end{aligned}$$

hat. Es wird folglich

$$[\varphi^0, \psi^0]'' = [\varphi^0, \psi]''.$$

In derselben Weise wird gezeigt, indem man nach Ausführung der partiellen Differentiationen die mit den verschwindenden Größen F, Φ, ..., A, B, ... multiplizierten Glieder fortwirft, daß

$$\begin{aligned}[\varphi^0, \psi]'' &= [\varphi + \lambda F + \mu \Phi + \cdots + \lambda' A + \mu' B + \cdots, \psi]''\\ &= [\varphi, \psi]'' + \lambda [F, \psi]'' + \mu [\Phi, \psi]'' + \cdots\\ &\qquad + \lambda' [A, \psi]'' + \mu' [B, \psi]'' + \cdots\end{aligned}$$

wird. Da wir bewiesen haben, daß man, was auch die Funktion ψ sein mag,

$$0 = [F, \psi]'' = [\Phi, \psi]'' = \cdots = [A, \psi]'' = [B, \psi]'' = \cdots$$

hat, so ergibt sich

$$[\varphi^0, \psi^0]'' = [\varphi^0, \psi]'' = [\varphi, \psi]'',$$

was der zu beweisende Satz ist.

Der Wert des Ausdrucks Ξ darf sich ferner nicht ändern, wenn man die Funktionen R durch $R + \lambda F + \mu \Phi + \cdots + \lambda_1 F' + \mu_1 \Phi' + \cdots$ ersetzt und aus dieser neuen Funktion die von den früheren verschiedenen Werte der v_i und die ziemlich abweichende Form der Funktion H ableitet, wie ich es in § 39 gezeigt habe. Da aber der Beweis dieser Eigenschaft, wenn man ihn aus dem Bildungsgesetz der Größe Ξ gewinnen will, sehr beschwerlich zu sein scheint, so mag es genügen, den Fall zu untersuchen, daß man zu R nur die Glieder $\lambda F + \mu \Phi + \cdots$ addiert. In diesem Falle ändern sich, wie wir damals gesehen haben, die Werte der v_i gar nicht, und zu der Funktion H treten nur ähnliche Glieder hinzu.

Wir wollen also beweisen, daß die Größe Ξ ihren Wert nicht ändert, wenn man darin H durch $H + \lambda F + \mu \Phi + \cdots$ ersetzt, wobei λ, μ, ... irgend welche Ausdrücke in den ξ_i, v_i, bezeichnen. Es ist leicht zu erkennen, daß bei dieser Änderung der Funktion H die A, B, ... nur ähnliche Änderungen erfahren, mithin auch die partiellen Ableitungen der A, B, ... nach den v_i, sowie die Ausdrücke $[F, A]'$, $[F, B]'$, ..., $[\Phi, A]'$, $[\Phi, B]'$, ...; folglich erfahren auch, wie aus den Formeln (2) erhellt, die Größen $D_{k,1}$, $D_{k,2}$, ... keine andern Änderungen. Daher werden die Werte aller dieser Größen ungeändert bleiben. Dagegen werden die Ausdrücke $[\varphi, A]'$, $[A, B]'$, ... und die ähnlichen ihren Wert ändern. Diese Änderungen müssen jedoch derartig sein, daß der Wert von Ξ ungeändert bleibt. Das wird leicht zu erkennen sein, wenn wir bewiesen haben, daß das Aggregat der Glieder des Ausdrucks Ξ, die mit der Funktion A behaftet sind, verschwindet, wenn man A durch F ersetzt. Dann werden nämlich auch die ähnlichen Sätze gelten, daß dasselbe Aggregat verschwindet, wenn man A durch Φ ersetzt, und daß das Aggregat der mit der Funktion B behafteten Glieder verschwindet, wenn man B durch F oder Φ ersetzt usw. Verbindet man dies mit der Bemerkung, daß Ausdrücke wie $[A, B]'$ verschwinden, wenn für A und B irgend welche von den Funktionen F, Φ, ..., seien sie verschieden oder nicht, gesetzt werden, so erhellt von selbst, daß der Wert von Ξ sich nicht ändert. Der Satz aber, daß das Aggregat der mit der Funktion A behafteten Glieder von Ξ verschwindet, wenn man A durch F ersetzt, folgt ohne große Mühe aus den Gleichungen (2).

Beliebige Funktionen φ, ψ sollen mit Hilfe der Bedingungsgleichungen $F=0$, $\Phi=0$, ... so umgeformt werden, daß $[\varphi, \psi]=[\varphi, \psi]'$ wird.

§ 48. Die Form, die die Funktion φ wegen der vorhandenen Bedingungsgleichungen annehmen kann, läßt sich immer so bestimmen, daß vermöge dieser Bedingungsgleichungen die Werte der Ausdrücke

$$[F, \varphi]'=\frac{\partial F}{\partial \xi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}+\frac{\partial F}{\partial \xi_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu},$$

$$[\Phi, \varphi]'=\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}+\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

verschwinden; und ebenso kann man der Funktion ψ eine solche Form verschaffen, daß vermöge der Bedingungsgleichungen die Werte der Ausdrücke $[F, \psi]'$, $[\Phi, \psi]'$, ... verschwinden. Der anzuwendende Ausdruck von φ sei $\varphi+\lambda' A+\mu' B+\cdots$. Dann lassen sich die Multiplikatoren λ', μ', ... immer so bestimmen, daß die Werte der Größen

$$[F, \varphi+\lambda' A+\mu' B+\cdots]',$$

$$[\Phi, \varphi+\lambda' A+\mu' B+\cdots]',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

verschwinden. Wenn man die mit A, B, ... multiplizierten Glieder als verschwindend fortwirft, so wird

$$[F, \varphi]'+\lambda'[F, A]'+\mu'[F, B]'+\cdots=0,$$

$$[\Phi, \varphi]'+\lambda'[\Phi, A]'+\mu'[\Phi, B]'+\cdots=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Durch ähnliche Formeln bestimmen sich die Multiplikatoren λ_1', μ_1', ... so, daß die Größen

$$[F, \psi+\lambda_1' A+\mu_1' B+\cdots]',$$

$$[\Phi, \psi+\lambda_1' A+\mu_1' B+\cdots]',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

verschwinden. Setzen wir, was erlaubt ist, diese Ausdrücke $\varphi+\lambda' A+\mu' B+\cdots$, $\psi+\lambda_1' A+\mu_1' B+\cdots$ an die Stelle von φ, ψ, so haben wir Formen von φ und ψ, für die

$$(1)\qquad \begin{cases}[F,\ \varphi]'=0, & [\Phi,\ \varphi]'=0,\ \ldots,\\ [F,\ \psi]'=0, & [\Phi,\ \psi]'=0,\ \ldots\end{cases}$$

ist, wie es gewünscht wurde.

Nachdem Formen von φ, ψ gefunden sind, für die die obigen Gleichungen (1) bestehen, folgt sofort aus (28) in § 43, daß auch

$$(2)\qquad \begin{cases}\sum_k{}' D_{k,1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}=0, & \sum_k{}' D_{k,2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}=0,\ \cdots,\\ \sum_k{}' D_{k,1}\dfrac{\partial\psi}{\partial v_k}=0, & \sum_k{}' D_{k,2}\dfrac{\partial\psi}{\partial v_k}=0,\ \cdots\end{cases}$$

wird. Es verschwinden daher in dem Ausdruck Ξ alle Glieder außer $[\varphi,\ \psi]'$, d.h. es besteht, so oft $[F,\ \varphi]'=0$, $[\Phi,\ \varphi]'=0$, $\ldots$, $[F,\ \psi]'=0$, $[\Phi,\ \psi]'=0$, $\ldots$, ist, die Gleichung:

$$(3)\qquad [\varphi,\ \psi]=[\varphi,\ \psi]'.$$

Da man die Funktionen φ, ψ mit Hilfe der Bedingungsgleichungen immer so umformen kann, daß jenen Bedingungen genügt wird, so ergibt sich folgendes: Sind zwei beliebige Funktionen φ und ψ von $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_\mu,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_\mu$ gegeben, so kann man ihnen mit Hilfe der Bedingungsgleichungen, die zwischen jenen Größen bestehen, immer eine solche Form verschaffen, daß

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m}\\ &-\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m}\\ =&\frac{\partial\varphi}{\partial \xi_1}\frac{\partial\psi}{\partial v_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial \xi_2}\frac{\partial\psi}{\partial v_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial v_\mu}\\ &-\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}\frac{\partial\psi}{\partial \xi_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial v_2}\frac{\partial\psi}{\partial \xi_2}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial v_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial \xi_\mu}\end{aligned}$$

wird. Aus den Gleichungen (2) des vorigen Paragraphen leite ich leicht die folgenden ab

$$(4)\qquad \begin{cases}[F,\ \varphi]'=[F,\ A]'\sum_k{}' D_{k,1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}+[F,\ B]'\sum_k{}' D_{k,2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}+\cdots,\\ [\Phi,\varphi]'=[\Phi,A]'\sum_k{}' D_{k,1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}+[\Phi,\ B]'\sum_k{}' D_{k,2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}+\cdots,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

Vergleicht man sie mit denen, durch die oben die Werte der Multiplikatoren λ', μ', ..., bestimmt wurden, so kommt

$$\lambda' = -\sum_k D_{k,1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}, \quad \mu' = -\sum_k D_{k,2}\frac{\partial\varphi}{\partial v_k}, \quad \cdots$$

Wir haben also nach (1), was auch die Funktion φ sein mag,

$$(5)\quad \begin{cases} \left[F,\ \varphi - \sum_k (D_{k,1}A + D_{k,2}B + \cdots)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}\right]' = 0, \\ \left[\Phi,\ \varphi - \sum_k (D_{k,1}A + D_{k,2}B + \cdots)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_k}\right]' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Daher ist auch

$$\left[F,\ \psi - \sum_k (D_{k,1}A + D_{k,2}B + \cdots)\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\right]' = 0,$$
$$\left[\Phi,\ \psi - \sum_k (D_{k,1}A + D_{k,2}B + \cdots)\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\right]' = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nach (3) wird also sein

$$(6)\quad \begin{aligned} &[\varphi,\ \psi] = \Xi = \\ &\left[\varphi - \sum_k (D_{k,1}A + D_{k,2}B + \cdots)\frac{\partial\varphi}{\partial v_k},\right. \\ &\left.\psi - \sum_k (D_{k,1}A + D_{k,2}B + \cdots)\frac{\partial\psi}{\partial v_k}\right]'. \end{aligned}$$

Dieser neue Ausdruck fällt ohne weiteres mit dem Ausdruck (1) in § 47 zusammen, zu dem wir oben gelangt sind. Man braucht nur zu bedenken, daß nach Fortlassung der mit A, B, ... behafteten und daher verschwindenden Glieder für beliebige Multiplikatoren λ', μ', ..., λ_1', μ_1', ... die Gleichung gilt

$$\begin{aligned} &[\varphi + \lambda' A + \mu' B + \cdots,\ \psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots]' = \\ &\quad [\varphi,\ \psi]' + \lambda_1'[\varphi,\ A]' + \mu_1'[\varphi,\ B]' + \cdots \\ &\quad - \lambda'[\psi,\ A]' - \mu'[\psi,\ B]' - \cdots \\ &\quad + (\lambda'\mu_1' - \lambda_1'\mu')[A,\ B]' + \cdots \end{aligned}$$

Auf den obigen Betrachtungen läßt sich eine neue Methode zur Ermittelung des Ausdrucks Ξ begründen, den wir oben auf einen ziemlich umständlichen Wege gefunden haben. Diese Methode wird über die ganze Frage großes Licht verbreiten.

Aus den obigen Betrachtungen wird ein anderer Weg zur Herleitung des angegebenen Ausdrucks von $[\varphi, \psi]$ gesucht.

§ 49. Die Größen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ sind nicht völlig bestimmte Funktionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$, da man zu ihnen die Funktionen F, Φ, ... mit beliebigen Faktoren multipliziert addieren darf. Ebenso sind auch $p_1, p_2, \ldots, p_m$ nicht völlig bestimmte Funktionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu, v_1, v_2, \ldots, v_\mu$, da man zu den in § 40 angegebenen Werten derselben die Funktionen F, Φ, ..., A, B, ... mit beliebigen Faktoren multipliziert addieren darf. Wenn also der Ausdruck irgend einer Funktion φ durch die Größen ξ_i, v_i und zugleich der Ausdruck derselben Funktion φ durch die Größen q_i, p_i gegeben wird, so kann man fragen, welche unter jenen verschiedenen Formen für die Werte der Größen q_i, p_i man auswählen muß, damit aus diesem Ausdruck von φ nach Ausführung der Substitutionen jener gegebene hervorgeht. Ich sage nun folgendes:

In dem Ausdruck einer beliebigen Funktion φ durch die Größen q_i, p_i mögen die Werte der q_i irgend welche Formen annehmen, die sie vermöge der Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$, ... annehmen können, dagegen werde den Werten der p_i die Form beigelegt, die sie in den Formeln des § 40 haben, und diese Form werde in keiner Weise mit Hilfe der Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0, \ldots, A = 0$, $B = 0, \ldots$ geändert. Dann kommt gerade diejenige Form der Funktion φ heraus, für die man hat

$$[F, \varphi]' = 0\,, \quad [\Phi, \varphi]' = 0\,, \quad \ldots$$

Es wird nämlich

$$[F, \varphi]' = \sum_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} = \sum_{k,i} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial v_k}.$$

Da aber angenommen wird, daß gemäß § 40 identisch gesetzt ist

$$p_i = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i},$$

so wird unter jener Voraussetzung

$$\frac{\partial p_i}{\partial v_k} = \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$[F, \varphi]' = \sum_{k, i} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} = \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \sum_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} \right).$$

Nun hat man aber

$$\sum_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0,$$

da die Funktion F, wenn man die durch die Größen q_i ausgedrückten Werte der ξ_i einsetzt, identisch verschwinden muß. Setzt man also in den $\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}$ die für die q_i angenommenen, durch die ξ_i ausgedrückten Werte ein, so muß der Ausdruck

$$\sum_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}$$

in ein Aggregat von Gliedern übergehen, die mit F, Φ, ... multipliziert sind.[21]) Nach der obigen Formel folgt daher, daß auch der Ausdruck $[F, \varphi]'$ in ein solches Aggregat übergeht, d. h. es gilt folgendes: Wenn in einer durch $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ ausgedrückten Funktion für die p_i die Werte

$$p_i = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}$$

eingesetzt werden, dann an die Stelle der q_i irgend welche Funktionen der ξ_i gesetzt und schließlich mit Hilfe der $\mu - m$ Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$, ... auch die Größen $\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}$ durch die ξ_i ausgedrückt werden, so geht die Funktion φ in einen solchen Ausdruck in den ξ_i, v_i über, daß die Größe

$$[F, \varphi]' = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \frac{\partial \varphi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu}$$

ein Aggregat von Gliedern wird, die mit F, Φ, ... multipliziert sind, und daher einen verschwindenden Wert hat. In derselben Weise zeigt man, daß die Ausdrücke $[\Phi, \varphi]'$, $[F, \psi]'$, $[\Phi, \psi]'$, ... in ebensolche Aggregate übergehen und daher verschwinden. Hat man die Funktionen der ξ_i gewählt, die an die Stelle der q_i gesetzt werden sollen, so erhält man die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}$, ausgedrückt durch die ξ_i, mit Hilfe der linearen Gleichungen

$$\begin{array}{l}
0 = \frac{\partial q_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial q_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial q_1}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
0 = \frac{\partial q_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial q_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial q_2}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
1 = \frac{\partial q_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial q_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial q_i}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 = \frac{\partial q_m}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial q_m}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
0 = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_i}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Wenn die Größen $\frac{\partial \xi_k}{\partial q_i}$ mit Hilfe der Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$, ... in solche Ausdrücke übergeführt werden, daß für jeden Wert von i identisch

$$\sum_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} = 0, \quad \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial q_i} = 0, \; \cdots$$

ist, so wird die Funktion φ eine solche Form erhalten haben, daß die Ausdrücke

$$[F, \varphi]', \quad [\Phi, \varphi]', \; \cdots$$

sogar identisch verschwinden. Allgemein aber wird eine beliebig gegebene Funktion φ mit Hilfe der Gleichungen $A=0$, $B=0$, ... auf eine Form gebracht, für die die Ausdrücke $[F, \varphi]'$, $[\Phi, \varphi]'$, ... identisch verschwinden, indem man m voneinander unabhängige, in bezug auf die v_i lineare Ausdrücke

$$w_i = \alpha_i' v_1 + \alpha_i'' v_2 + \cdots + \alpha_i^{(\mu)} v_\mu$$

wählt, deren Koeffizienten $\alpha_i^{(k)}$ so als Funktionen der ξ_k bestimmt werden, daß identisch

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \alpha_i' + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \alpha_i'' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} \alpha_i^{(\mu)},$$

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} \alpha_i' + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} \alpha_i'' + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu} \alpha_i^{(\mu)},$$

. . . .

wird. Ist z. B. $\mu - m = 2$, d. h. sind nur zwei Bedingungsgleichungen oder Funktionen F, Φ vorhanden, so kann man annehmen

$$w_1 = \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2 + v_3,$$

$$w_2 = \alpha_2 v_1 + \beta_2 v_2 + v_4,$$

. . . .

$$w_{\mu-2} = \alpha_{\mu-2} v_1 + \beta_{\mu-2} v_2 + v_\mu,$$

wo die α_k, β_k durch die beiden Gleichungen

$$\alpha_k \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \beta_k \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + \frac{\partial F}{\partial \xi_{k+2}} = 0,$$

$$\alpha_k \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} + \beta_k \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{k+2}} = 0$$

bestimmt sind. Dies läßt sich leicht auf eine beliebige Zahl von Bedingungsgleichungen oder Funktionen F, Φ, ... ausdehnen. Nachdem die linearen Funktionen w_i so bestimmt sind, daß sie den genannten Bedingungen genügen, kann man mit Hilfe der $\mu - m$ Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, ... die Größen $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ aus der Funktion φ eliminieren, so daß sie nur eine Funktion der ξ_i, w_i wird, und das ist der gesuchte Ausdruck.

Um den in § 47 angegebenen Ausdruck für Ξ zu finden, ist nur nötig zu zeigen, daß, so oft

$$(1) \quad [F, \varphi]' = 0, \quad [\Phi, \varphi]' = 0, \ldots$$
$$(2) \quad [F, \psi]' = 0, \quad [\Phi, \psi]' = 0, \ldots$$

ist,

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]'$$

wird. Nennen wir nämlich φ^0, ψ^0 diejenigen Ausdrücke von φ, ψ, für die die Gleichungen (1), (2) stattfinden, und sei

$$[\varphi, \psi] = [\varphi^0, \psi^0]'.$$

Dann folgt aus § 48, daß

$$\varphi^0 = \varphi + \lambda' A + \mu' B + \cdots,$$
$$\psi^0 = \psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots$$

ist, wo

$$\lambda' = -\sum_k D_{k,1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}, \quad \mu' = -\sum_k D_{k,2} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}, \cdots$$
$$\lambda_1' = -\sum_k D_{k,1} \frac{\partial \psi}{\partial v_k}, \quad \mu_1' = -\sum D_{k,2} \frac{\partial \psi}{\partial v_k}, \cdots,$$

und daß die Funktionen φ^0, ψ^0 keine andern Formen annehmen können, außer daß zu ihnen Glieder addiert werden dürfen, die mit F, Φ, ... multipliziert sind. Es ist aber leicht zu erkennen, da die Gleichungen (1) und (2) für $\varphi = \varphi^0$, $\psi = \psi^0$ bestehen, daß der Ausdruck $[\varphi^0, \psi^0]$ bei Hinzufügung solcher Glieder zu φ^0, ψ^0 seinen Wert nicht ändert. Daraus ergibt sich

$$[\varphi, \psi] = [\varphi + \lambda' A + \mu' B + \cdots, \ \psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots]' = \Xi,$$

was zu beweisen war. Ebenso zeigt man, daß, wenn nur die Gleichungen (1) gelten,

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots]'$$

ist.

Der Satz aber, daß, so oft die Gleichungen (1) und (2) gelten,

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]'$$

ist, läßt sich folgendermaßen beweisen.

Fortsetzung. Es wird gezeigt, daß das dritte Integral, das sich aus zwei Integralen der dynamischen Gleichungen herstellen läßt, in keiner Weise von der Wahl der Veränderlichen abhängt.

§ 50. Ich habe oben nachgewiesen, daß für alle Formen der Funktionen φ, ψ, für die die Gleichungen (1), (2) des vorigen Paragraphen gelten, die Größe $[\varphi, \psi]'$ denselben Wert bewahrt. Man darf daher annehmen, daß φ, ψ die Funktionen sind, die aus ihren Ausdrücken durch die Größen q_k, p_k dadurch hervorgehen, daß man für p_k den Ausdruck

$$p_k = v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial q_k} + v_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial q_k} + \cdots + v_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial q_k}$$

setzt; denn ihnen kommt, wie wir oben gesehen haben, jene Eigenschaft zu. Für diese Funktionen φ, ψ hat man aber

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} = \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \xi_i} + \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v_i} = \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial v_i} = \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_k},$$

und ähnliche Formeln gelten für die Funktion ψ. Es wird daher

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \frac{\partial \psi}{\partial v_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_i} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \\ &= \sum_{k,k'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{k'}} \right) \frac{\partial q_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_{k'}} \\ &+ \sum_{k,k'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial \psi}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{k'}} \right) \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_{k'}}. \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck sind dem Index i die Werte $1, 2, \ldots, \mu$ beizulegen, und dann ist eine neue Summation vorzunehmen. Es wird aber

$$\sum_i \frac{\partial q_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_{k'}} = \frac{\partial q_k}{\partial q_{k'}} = 0, \quad \sum_i \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_{k'}} = \frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}} = 0$$

außer in dem Falle, wo in der ersten Formel $k = k'$ wird; dann kommt nämlich die Einheit heraus. Bei jener neuen Summation verschwinden also alle Glieder außer

$$\sum_k \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \right) \sum_i \frac{\partial q_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_k} \right\} = \sum_k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \right)$$

Es ergibt sich mithin

$$\sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \frac{\partial \psi}{\partial v_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_i} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i}\right) = \sum_k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_k}\right),$$

d. h.

$$[\varphi, \psi]' = [\varphi, \psi],$$

was zu beweisen war.

Durch genau denselben Beweis läßt sich leicht zeigen, daß, wenn überhaupt keine Bedingungsgleichungen zwischen den ξ_i vorhanden sind, also $\mu = m$ ist, immer

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]'$$

wird, d. h.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m} \frac{\partial \psi}{\partial p_m} \\
&- \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} \frac{\partial \psi}{\partial q_m} \\
= &\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \frac{\partial \psi}{\partial v_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \frac{\partial \psi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial v_\mu} \\
&- \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_\mu}.
\end{aligned}$$

Daraus geht hervor, daß die Größe $[\varphi, \psi]$ in keiner Weise von der Wahl der Veränderlichen q_i abhängt, sondern nur von der innersten Natur der Funktionen φ und ψ. Hieraus ergibt sich auch, daß, wenn

$$\varphi = \text{Konst.}, \quad \psi = \text{Konst.}$$

zwei Integrale des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

sind, das durch die Gleichung

$$[\varphi, \psi] = \text{Konst.}$$

gegebene dritte Integral derselben Differentialgleichungen in keiner Weise von der Wahl der Veränderlichen abhängt.[22])

Das Theorem von der Auffindung eines dritten Integrals aus zweien wird auf den Fall ausgedehnt, wo Bedingungsgleichungen zwischen den Veränderlichen bestehen. — Über die Beziehungen, die zwischen den auf das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte und das Prinzip der Erhaltung des Schwerpunktes bezüglichen Integralen stattfinden.

§ 51. Nehmen wir an, die Gleichung

$$\varphi = \text{Konst.}$$

sei ein Integral der in § 45 (2) angegebenen gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_i} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} - \cdots$$

und die Funktion φ sei überdies so beschaffen, daß identisch

$$[\varphi, H]' = 0, \quad [\varphi, F]' = 0, \quad [\varphi, \Phi]' = 0, \ldots$$

ist. Ich behaupte, daß dann

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]'$$

sein wird, was auch die Funktion ψ sein mag. Nach Theorem V in § 26 wird nämlich identisch, was auch die Funktionen F, H, φ sein mögen,

$$[F, [\varphi, H]']' + [\varphi, [H, F]']' + [H, [F, \varphi]']' = 0.$$

Im vorliegenden Falle ist also identisch

$$[\varphi, [H, F]']' = 0, \quad \text{d. h. } [\varphi, A]' = 0,$$

und in derselben Weise erhält man identisch

$$[\varphi, B]' = 0.$$

Ich habe aber in § 48 bewiesen, daß, so oft

$$[\varphi, F]' = 0, \ [\varphi, \Phi]' = 0, \ldots$$

ist,

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi + \lambda_1' A + \mu_1' B + \cdots]'$$

wird, woraus folgt

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]' + \lambda_1'[\varphi, A]' + \mu_1'[\varphi, B]' + \cdots.$$

Hiernach wird im vorliegenden Falle, wo, wie wir gesehen haben $[\varphi, A]'$, $[\varphi, B]'$, ... verschwinden,

$$[\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]',$$

was zu beweisen war.

Mit Hilfe des vorstehenden Satzes läßt sich aus dem Theorem VI das folgende Theorem herleiten:

Theorem VII.

F, Φ, ... seien beliebige Funktionen der Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$, und es sei identisch

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

ferner habe man identisch

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + \frac{\partial H}{\partial \xi_2}\frac{\partial \varphi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu}$$
$$- \frac{\partial H}{\partial v_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} - \frac{\partial H}{\partial v_2}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} - \cdots - \frac{\partial H}{\partial v_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\mu} = 0,$$

so daß $\varphi =$ Konst. ein Integral des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_i} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} - \cdots$$

wird, wobei wir von den Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ annehmen, daß sie den Bedingungen $F = 0$, $\Phi = 0$, ... unterworfen sind; endlich sei $\psi =$ Konst. irgend ein anderes Integral derselben Gleichungen. Alsdann wird auch die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\frac{\partial \psi}{\partial v_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}\frac{\partial \psi}{\partial v_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\mu}\frac{\partial \psi}{\partial v_\mu}$$
$$- \frac{\partial \varphi}{\partial v_1}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_2}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial v_\mu}\frac{\partial \psi}{\partial \xi_\mu} = \text{Konst.}$$

ein Integral der angegebenen gewöhnlichen Differentialgleichungen sein.[23])

Ich will von dem vorstehenden Theorem eine Anwendung machen auf die Integrale, die sich auf das Prinzip der Erhaltung der Flächen und das der Erhaltung des Schwerpunktes beziehen.

Bezeichnen x_i, y_i, z_i die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes mit der Masse m_i, so hat man drei Integrale, die sich auf das Prinzip von der Erhaltung der Flächen beziehen

$$\text{Konst.} = \varphi_1 = \sum m_i (y_i z_i' - z_i y_i'),$$
$$\text{Konst.} = \varphi_2 = \sum m_i (z_i x_i' - x_i z_i'),$$
$$\text{Konst.} = \varphi_3 = \sum m_i (x_i y_i' - y_i x_i').$$

Sie sind bekanntlich immer vorhanden, wenn die auf die Punkte des Systems wirkenden Kräfte Anziehungen oder Abstoßungen sind, und zwar entweder gegenseitige oder gegen den Koordinatenanfang gerichtete, und wenn außerdem das System durch die ihm auferlegten Bedingungen in keiner Weise gehindert wird, frei um den Anfangspunkt zu rotieren. So oft ξ_k eine der Größen x_i, y_i, z_i bezeichnet, wird für v_k (vgl. § 44) bezüglich zu setzen sein $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$. Bezeichnet daher ψ irgend eine andere Funktion der x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', so wird

$$[\varphi_1, \psi]' = \sum \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i}\frac{\partial \psi}{\partial y_i'} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i}\frac{\partial \psi}{\partial z_i'} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i'}\frac{\partial \psi}{\partial y_i} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i'}\frac{\partial \psi}{\partial z_i}\right)$$
$$= \sum\left(z_i'\frac{\partial \psi}{\partial y_i'} - y_i'\frac{\partial \psi}{\partial z_i'} + z_i\frac{\partial \psi}{\partial y_i} - y_i\frac{\partial \psi}{\partial z_i}\right),$$

und ähnliche Formeln erhält man bezüglich der Funktionen φ_2, φ_3. In dem Falle, den wir betrachten, gelten die in Theorem VII geforderten Bedingungen, wenn wir als Funktion φ eine der Funktionen φ_1, φ_2, φ_3 annehmen. So oft also $\psi = \text{Konst.}$ ebenfalls ein Integral des Problems ist, und zwar irgend eins, ergibt sich aus jenem Theorem

$$(1)\begin{cases} \text{Konst.} = [\varphi_1, \psi]' = \sum\left(z_i'\dfrac{\partial \psi}{\partial y_i'} - y_i'\dfrac{\partial \psi}{\partial z_i'} + z_i\dfrac{\partial \psi}{\partial y_i} - y_i\dfrac{\partial \psi}{\partial z_i}\right), \\ \text{Konst.} = [\varphi_2, \psi]' = \sum\left(x_i'\dfrac{\partial \psi}{\partial z_i'} - z_i'\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i'} + x_i\dfrac{\partial \psi}{\partial z_i} - z_i\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}\right), \\ \text{Konst.} = [\varphi_3, \psi]' = \sum\left(y_i'\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i'} - x_i'\dfrac{\partial \psi}{\partial y_i'} + y_i\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} - x_i\dfrac{\partial \psi}{\partial y_i}\right). \end{cases}$$

Wenn wir in diesen Formeln, was erlaubt ist, ψ eine der Funktionen φ_1, φ_2, φ_3 sein lassen, so findet sich leicht

$$(2)\qquad \begin{cases} [\varphi_2, \varphi_3]' = \varphi_1, \\ [\varphi_3, \varphi_1]' = \varphi_2, \\ [\varphi_1, \varphi_2]' = \varphi_3. \end{cases}$$

So oft bei einem mechanischen Problem das Prinzip von der Erhaltung der Flächen gilt, sind die identischen Gleichungen erfüllt, die wir in Theorem VII annehmen, vorausgesetzt, daß in jenem Theorem für φ eine der Funktionen φ_1, φ_2, φ_3 gesetzt wird. Denn jene in Theorem VII angegebenen identischen Gleichungen machen gerade den Charakter der Erhaltung aus, von dem das mechanische Prinzip seinen Namen hat. Wir können daher auf die obigen Formeln das Theorem VII anwenden, d. h. wenn $\varphi =$ Konst. ein auf das Prinzip der Erhaltung der Flächen bezügliches Integral ist und $\psi =$ Konst. irgend ein anderes Integral eines mechanischen Problems, bei dem jenes Prinzip gilt, so wird sein:

$$(3)\qquad [\varphi, \psi] = [\varphi, \psi]'.$$

Es fließen also aus den obigen drei Formeln (2) auch die drei folgenden:

$$(4)\qquad [\varphi_2, \varphi_3] = \varphi_1, \quad [\varphi_3, \varphi_1] = \varphi_2, \quad [\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_3.$$

In der Formel (3) kann die Funktion φ eine der Funktionen φ_1, φ_2, φ_3 oder irgend eine Funktion derselben bezeichnen.

Aus den Formeln (4) ersehen wir folgendes: Wenn die allgemeine Regel, nach der, wie wir gesehen haben, aus zwei Integralen ein drittes gebildet werden kann, auf die drei Integrale angewendet wird, die das Prinzip der Erhaltung der Flächen liefert, so erzeugen diese Integrale nur sich selbst, und man gelangt in diesem Falle durch jene Regel zu keinen neuen Integralen. Es kann aber bemerkt werden, daß nach jener Regel von den drei Integralen je zwei das dritte liefern, womit gezeigt ist, daß bei einem mechanischen Problem unmöglich nur zwei solche Integrale da sein können, während das dritte fehlt. Das wird hier durch rein analytische Sätze ohne Hilfe geometrischer Betrachtungen festgestellt.

Setzen wir

$$\chi_1 = \sum m_i x_i', \quad \chi_2 = \sum m_i y_i', \quad \chi_3 = \sum m_i z_i',$$

so machen die drei Integrale

$$\chi_1 = \text{Konst.}, \quad \chi_2 = \text{Konst.}, \quad \chi_3 = \text{Konst.}$$

das Prinzip von der Erhaltung des Schwerpunktes aus. Man findet aber, wenn man in (1) für ψ der Reihe nach χ_1, χ_2, χ_3 setzt,

$$(5)\begin{cases} [\varphi_1, \chi_1]' = 0, & [\varphi_1, \chi_2]' = \chi_3, & [\varphi_1, \chi_3]' = -\chi_2, \\ [\varphi_2, \chi_1]' = -\chi_3, & [\varphi_2, \chi_2]' = 0, & [\varphi_2, \chi_3]' = \chi_1, \\ [\varphi_3, \chi_1]' = \chi_2, & [\varphi_3, \chi_2]' = -\chi_1, & [\varphi_3, \chi_3]' = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln folgt, was sich auch durch geometrische Betrachtungen beweisen läßt, daß nämlich, so oft das Prinzip der Erhaltung der Flächen gilt, jedes der drei Integrale, die das Prinzip der Erhaltung des Schwerpunktes betreffen, die beiden übrigen nach sich zieht. Wenn von den drei Integralen, die das Prinzip der Erhaltung der Flächen betreffen, eins gilt, etwa $\varphi_1 = \text{Konst.}$, so erzeugt dieses und das Integral $\chi_1 = \text{Konst.}$ kein anderes; dagegen bringt das Integral $\varphi_1 = \text{Konst.}$ und eins der Integrale $\chi_2 = \text{Konst.}$, $\chi_3 = \text{Konst.}$ das andere hervor. Nach Theorem VII gelten die Formeln (5) auch, wenn die Striche oben fortgelassen werden.

Die einfachen Störungsformeln, die aus dem angegebenen System von Integralen erhalten werden.

§ 52. Kehren wir zurück zu dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(1)\begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial p_1}, & \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial p_2}, & \ldots, & \dfrac{dq_m}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial p_m}, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{\partial f}{\partial q_1}, & \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{\partial f}{\partial q_2}, & \ldots, & \dfrac{dp_m}{dt} = -\dfrac{\partial f}{\partial q_m}. \end{cases}$$

Ihre Integrale

$$(2)\begin{cases} f = H = a, & H_1 = a_1, \; H_2 = a_2, \; \ldots, \; H_{m-1} = a_{m-1}, \\ H' = b + t, & H_1' = b_1, \; H_2' = b_2, \; \ldots, \; H_{m-1}' = b_{m-1} \end{cases}$$

habe ich in § 34 in einer solchen Form finden gelehrt, daß identisch ist

$$(3) \qquad [H_i, H_k] = 0, \quad [H_i, H_k'] = 0, \quad [H_i', H_k'] = 0$$

mit Ausnahme des Falles, wo in dem Ausdruck $[H_i, H_k']$ $i = k$ wird; dann hat man nämlich

$$[H_i, H_i'] = -1 \quad \text{oder} \quad [H_i', H_i] = 1. \tag{4}$$

Diese Gleichungen bewirken, daß für die Form, unter der wir die Integrale gefunden haben, auch die auf das gestörte Problem bezüglichen Formeln eine ganz einfache Gestalt annehmen.

Betrachten wir in der Tat in den gefundenen Integralen die Größen $a, a_1, \ldots, a_{m-1}, b, b_1, \ldots, b_{m-1}$ als Funktionen von t, die so beschaffen sind, daß die Integrale nunmehr den Differentialgleichungen genügen:

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_1}, \\ \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_2}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_m}, & \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_m}. \end{array}\right. \tag{5}$$

Dabei bezeichne Ω irgend eine Funktion von $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$. Das ist eine zuerst von *Hamilton* bekannt gemachte Ausdehnung der gewöhnlichen Störungsformeln, während gewöhnlich angenommen wird, daß die Störungsfunktion Ω die Größen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ nicht enthält.[24]) So oft nämlich die Funktion Ω die p_i nicht enthält, wird nach (5) wie in (1)

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i},$$

d. h. die ersten Ableitungen $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots, \frac{dq_m}{dt}$ drücken sich bei dem gestörten Problem ebenso durch $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ aus wie bei dem nicht gestörten. Da nun bei beiden Problemen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ in derselben Weise von t und von den Elementen $a, a_1, \ldots, a_{m-1}, b, b_1, \ldots, b_{m-1}$ abhängen, die nur bei dem zweiten Problem als Veränderliche angesehen werden, so drücken sich auch die ersten Ableitungen $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots, \frac{dq_m}{dt}$ durch die Zeit

und die Elemente bei dem gestörten und bei dem ungestörten Problem mittels derselben Formeln aus. Das ist die gewöhnliche Annahme. Bei der Verallgemeinerung aber, die ich im Anschluß an *Hamilton* angegeben habe, drücken sich zwar bei beiden Problemen die Veränderlichen q_i, p_i alle in derselben Weise durch die Zeit und die Elemente aus, während sich die ersten Ableitungen in verschiedener Weise durch die q_i und p_i und daher auch in verschiedener Weise durch die Zeit und die Elemente ausdrücken.

Differentiiert man (2) und setzt (5) ein, so erhält man:

$$\frac{da_i}{dt} = [H_i,\ f] + [H_i,\ \Omega],$$

$$\frac{db_i}{dt} = [H_i',\ f] + [H_i',\ \Omega],$$

ausgenommen nur die Formel, die man für das Element b findet:

$$\frac{db}{dt} + 1 = [H',\ f] + [H',\ \Omega].$$

Wir haben aber nach (3), (4):

$$[H_i,\ f] = [H_i,\ H] = 0, \quad [H_i',\ f] = [H_i',\ H] = 0,$$

außerdem

$$[H',\ f] = [H',\ H] = 1\,;$$

mithin wird für jeden Wert von i:

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{da_i}{dt} = [H_i,\ \Omega], \\ \dfrac{db_i}{dt} = [H_i',\ \Omega], \end{cases}$$

Wenn in diesen Formeln nach Bildung der Ausdrücke rechts mit Hilfe der Gleichungen (2) an Stelle der Veränderlichen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ als Veränderliche die $a, a_1, \ldots, a_{m-1}, b, b_1, \ldots, b_{m-1}$ eingeführt werden, so werden die Formeln (6) $2m$ gewöhnliche Differentialgleichungen zwischen diesen und t. Durch diese Differentialgleichungen sind die Elemente a_i, b_i als Funktionen von t zu bestimmen. Man

hat aber, wenn wir die in den Ausdrücken rechts auftretende Funktion Ω durch die Elemente a_i, b_i und t ausgedrückt denken,

$$[H_i,\ \Omega] = \sum_k \frac{\partial \Omega}{\partial a_k}[H_i,\ H_k] + \sum_k \frac{\partial \Omega}{\partial b_k}[H_i,\ H_k'],$$

$$[H_i',\ \Omega] = \sum_k \frac{\partial \Omega}{\partial a_k}[H_i',\ H_k] + \sum_k \frac{\partial \Omega}{\partial b_k}[H_i',\ H_k'],$$

da $a_i = H_i$, $b_i = H_i'$ ist. Nach (3) verschwinden nun die mit den partiellen Ableitungen $\frac{\partial \Omega}{\partial a_k}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial b_k}$ behafteten Glieder sämtlich außer

$$[H_i,\ H_i'] = -1;$$

mithin wird

$$[H_i,\ \Omega] = -\frac{\partial \Omega}{\partial b_i},$$

$$[H_i',\ \Omega] = \frac{\partial \Omega}{\partial a_i}.$$

Die Formeln (6) gehen somit in folgende über

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{da_i}{dt} = -\dfrac{\partial \Omega}{\partial b_i}, \\[2ex] \dfrac{db_i}{dt} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial a_i} \end{cases}$$

oder

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial b}, & \frac{db}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial a}, \\
\frac{da_1}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial b_1}, & \frac{db_1}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial a_1}, \\
\frac{da_2}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial b_2}, & \frac{db_2}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial a_2}, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
\frac{da_{m-1}}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial b_{m-1}}, & \frac{db_{m-1}}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial a_{m-1}}.
\end{aligned}$$

Diese für die Ableitungen der gestörten Elemente gefundenen Formeln sind von hervorragender Einfachheit.

Hieraus geht folgendes Theorem hervor:

*) Ein gewisses angenähertes Problem sei in Gleichungen folgender Art enthalten:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

wobei f irgend eine Funktion der q_i, p_i bezeichnet. Für dieses System seien

$$f = H = a, \quad H_1 = a_1, \quad \ldots, \quad H_{m-1} = a_{m-1}$$

Integrale, die nach der oben auseinandergesetzten Methode gefunden sind. a, $a_1, \ldots, a_{m-1}$ sind willkürliche Konstanten, die in den Funktionen H, $H_1, \ldots, H_{m-1}$ nicht vorkommen, und die Funktionen H, $H_1, \ldots, H_{m-1}$ genügen identisch den Gleichungen

$$0 = [H_i, H_k] = \frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_1} + \frac{\partial H_i}{\partial q_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_k}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial q_1} - \frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_k}{\partial q_m}.$$

Wenn man dann mit Hilfe der Gleichungen

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \quad \ldots, \quad H_{m-1} = a_{m-1}$$

die Werte der p_i durch $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und die willkürlichen Konstanten a, $a_1, \ldots, a_{m-1}$ darstellt, so wird

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m)$$

ein integrabler Ausdruck und

$$\frac{\partial V}{\partial a} = b + t, \quad \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_{m-1}} = b_{m-1}$$

werden endliche Gleichungen des angenäherten Problems, wobei b, $b_1, \ldots, b_{m-1}$ neue willkürliche Konstanten bezeichnen. Es sei nun das gestörte Problem in den folgenden Gleichungen enthalten

---

*) Von hier bis zu Anfang des § 53 findet sich eine Lücke in dem Manuskript. Ich habe mir erlaubt, sie mit dem Gegenstande auszufüllen, dessen Behandlung *Jacobi* an dieser Stelle ohne Zweifel beabsichtigt hatte. *Clebsch.*

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_2}, \ldots, \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_2}, \ldots, \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_m},$$

wobei die Störungsfunktion Ω irgend eine Funktion von t, q_1, $q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ bezeichne. Man drücke mit Hilfe der Integralgleichungen des angenäherten Problems q_1, $q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ sowie die Funktion Ω durch $a, a_1, \ldots, a_{m-1}, b, b_1, \ldots, b_{m-1}, t$ aus. Führt man dann die Größen $a, a_1, \ldots, a_{m-1}, b, b_1, \ldots, b_{m-1}$ an Stelle von $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ als Veränderliche ein, so gehen die Differentialgleichungen des gestörten Problems in folgende über:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b}, \quad \frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \ldots, \frac{da_{m-1}}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{d b_{m-1}},$$
$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a}, \quad \frac{db_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, \ldots, \frac{db_{m-1}}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_{m-1}}.$$

Ihrer Form nach sind sie den vorgelegten Gleichungen ähnlich.

Die Störungsformeln und das Theorem über die Auffindung eines dritten Integrals aus zweien werden auf den Fall ausgedehnt, daß die Funktion f auch t explizite enthält.

§ 53. Die im vorigen Paragraphen mitgeteilten Störungsformeln ändern sich in keiner Weise, wenn die Funktion f t auch explizite enthält. Werden nämlich im vorigen Paragraphen die betreffenden Änderungen ausgeführt, so finden wir, wenn die gestörten Differentialgleichungen

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_2}, \ldots, \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_2}, \ldots, \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_m}$$

gegeben sind, daß die Differentialformeln der gestörten Elemente folgende werden:

$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_2}, \ldots, \frac{da_m}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_m},$$
$$\frac{db_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_2}, \ldots, \frac{db_m}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_m}.$$

Ich will hinzufügen, daß auch das Theorem VI des § 27 gilt, wenn die Funktion f das t enthält. Bezeichnen also

$$\varphi = \text{Konst.}, \quad \psi = \text{Konst.}$$

irgend zwei Integrale der Gleichungen

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial p_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

so wird

$$[\varphi, \psi] = \text{Konst.}$$

ein drittes Integral. Damit nämlich $\varphi = \text{Konst.}$, $\psi = \text{Konst.}$ Integrale der angegebenen Differentialgleichungen seien, muß vermöge derselben identisch $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, $\frac{d\psi}{dt} = 0$ werden oder

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + [\varphi, f] = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + [\psi, f] = 0.$$

Mithin geht die aus Theorem V in § 26 zu entnehmende Identität

$$[[\varphi, \psi], f] + [[\psi, f], \varphi] + [[f, \varphi], \psi] = 0$$

durch Einsetzung der identischen Gleichungen

$$[\psi, f] = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad [f, \varphi] = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

in folgende über:

$$[[\varphi, \psi], f] + \left[\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right] + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right]$$
$$= [[\varphi, \psi], f] + \frac{\partial [\varphi, \psi]}{\partial t} = 0.$$

Sie fällt vermöge der vorgelegten Differentialgleichungen mit der Gleichung

$$\frac{d[\varphi, \psi]}{dt} = 0$$

zusammen, die zu beweisen war. Den vorstehenden Satz hat in der Verallgemeinerung, wie wir ihn angegeben haben, schon der berühmte *Poisson* veröffentlicht.[25])

Über das Integral, durch dessen Variation die dynamischen Gleichungen abgeleitet werden auch in dem Falle, wo die Funktion f oder U das t explizite enthält.

§ 54. Wenn bei mechanischen Problemen die Funktion f noch t explizite enthält, ein Fall, den wir im obigen betrachtet haben, so hören die allgemeinen Prinzipe von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, der Flächen, des Schwerpunktes auf zu gelten. Nur an Stelle des Prinzips der kleinsten Wirkung kann man ein anderes ähnliches aufstellen, das auch in diesem Falle gilt. t als die unabhängige Veränderliche werde nicht variiert, sondern nur die Funktionen derselben $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$, und man stelle die Gleichungen auf

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_1},\quad \frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_2},\quad \ldots,\quad \frac{dq_m}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_m},$$

auf Grund deren $p_1, p_2, \ldots, p_m$ durch $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, \frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots, \frac{dq_m}{dt}$ bestimmt werden: dann sind die übrigen Differentialgleichungen

$$\frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial q_1},\quad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial q_2},\quad \ldots,\quad \frac{dp_m}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial q_m}$$

in der einen symbolischen Gleichung enthalten

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta\left(p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial f}{\partial p_m}-f\right)\\ &=\frac{d}{dt}(p_1\,\delta q_1+p_2\,\delta q_2+\cdots+p_m\,\delta q_m).\end{aligned}\right.$$

Das findet auch statt, wenn in f das t explizite vorkommt, da das t ungeändert bleibt. Durch Integration der obigen Gleichung ergibt sich, wenn für die Grenzen von t alle Variationen δq_i verschwinden, d. h. die Größen q_i gegebene Werte annehmen müssen:

$$(2)\quad \delta\int\left(p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial f}{\partial p_m}-f\right)dt=0.$$

Die Formel (1) ist dieselbe wie die in § 37 angegebene, wenn nur H an Stelle von f geschrieben wird; damals war

jedoch vorausgesetzt, daß H oder f das t explizite nicht enthält. Wir haben damals auch gesehen, daß bei den mechanischen Anwendungen der Ausdruck, der in (2) unter dem Integralzeichen steht,

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m} - f = T + U$$

ist. T bedeutet immer noch die Summe der lebendigen Kräfte und U eine Funktion der Koordinaten x_i, y_i, z_i, deren partielle Ableitungen nach x_i, y_i, z_i die bewegenden Kräfte ausdrücken, durch die die Masse m_i nach den Richtungen der Koordinatenachsen angetrieben wird. Diese Funktion U enthält in dem von uns betrachteten Falle t auch explizite. Bei den mechanischen Problemen wird also, wenn auch U das t explizite enthält, die Gleichung gelten:

$$(3) \qquad \delta \int (T + U)\, dt = 0.$$

Sie vertritt in diesem Falle gewissermaßen das Prinzip der kleinsten Wirkung. Soviel ich sehe, ist die Gleichung (3) zum ersten Male von *Hamilton* in den schon öfter zitierten Abhandlungen angewandt worden. Sie eignet sich sogar noch mehr für die Ableitung der dynamischen Differentialgleichungen als jenes Prinzip. Und nicht dieses ist es, wie die Mathematiker meinten, sondern jene Gleichung, die dem statischen Prinzip der Ruhe entspricht. Von dem Integral $\int (T + U)\, dt$ gilt nicht, was man vom Prinzip der kleinsten Wirkung beweisen kann, daß das Integral, dessen Variation verschwindet, immer ein Minimum wird, vorausgesetzt, daß das Integral nicht über ein zu großes Intervall erstreckt ist. Denn jenes Integral wird auch für noch so enge Intervalle in manchen Fällen ein Minimum, in manchen ein Maximum, in manchen keins von beiden.[26]

Über eine gewisse Verbindung des Prinzips der Erhaltung der lebendigen Kräfte mit dem Prinzip der Erhaltung der Flächen, die in manchen Fällen auch gilt, wenn die Funktion U das t explizite enthält.

§ 55. So oft U das t enthält, gilt weder das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte noch das von der Erhaltung der Flächen. Wir wollen nun zusehen, ob nicht in

gewissen Fällen eine Verbindung beider statthaben kann. Die vorgelegten Gleichungen seien

$$(1)\quad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \cdots, \\ m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial y_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_i} + \cdots, \\ m_i \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial z_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_i} + \cdots, \end{cases}$$

wobei $F = 0$, $\Phi = 0$, ... die Bedingungsgleichungen darstellen, und i die Werte $1, 2, \ldots, n$ zukommen, wenn n die Anzahl der materiellen Punkte des Systems ist. Es sind das die bekannten dynamischen Formeln. Ich nehme aber jetzt an, daß die Funktion U auch t enthält. Multipliziert man die Gleichungen (1) mit $\dfrac{dx_i}{dt}$, $\dfrac{dy_i}{dt}$, $\dfrac{dz_i}{dt}$ und summiert, so ergibt sich

$$(2)\quad \frac{d(T-U)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0.$$

Die mit λ_1, λ_2, ... multiplizierten Glieder verschwinden vermöge der Bedingungsgleichungen.

Damit in bezug auf die Ebene der Koordinaten x, y das Prinzip von der Erhaltung der Flächen gelte, müssen zunächst die Bedingungsgleichungen so beschaffen sein, daß identisch ist

$$(3)\quad \begin{cases} \sum_i \left(y_i \dfrac{\partial F}{\partial x_i} - x_i \dfrac{\partial F}{\partial y_i} \right) = 0, \\ \sum_i \left(y_i \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} - x_i \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_i} \right) = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Ferner muß auch die Funktion U, von der die bewegenden Kräfte abhängen, so beschaffen sein, daß identisch ist

$$\sum_i \left(y_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial U}{\partial y_i} \right) = 0.$$

Es ist aber, damit man in dem betrachteten Falle ein Integral erhält, nicht nötig, daß der Ausdruck auf der linken

Seite der vorstehenden Gleichung verschwinde. Da nämlich aus (1) folgt

$$(4) \qquad \sum m_i \left(y_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dy_i}{dt} \right) = \int \sum \left(y_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial U}{\partial y_i} \right) dt,$$

und aus (2) das Integral des Ausdrucks $\frac{\partial U}{dt}$ erhalten wird, so ist nur nötig, daß man identisch hat:

$$(5) \qquad \sum \left(y_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial U}{\partial y_i} \right) = \alpha \frac{\partial U}{\partial t},$$

wo α eine Konstante bezeichnet. In diesem Falle gewinnt man nämlich aus (2) und (3) das folgende Integral der vorgelegten Differentialgleichungen:

$$(6) \qquad \alpha (T - U) + \sum m_i \left(y_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dy_i}{dt} \right) = \text{Konst.},$$

d. h. man erhält eine gewisse Verbindung der Prinzipe der Erhaltung der lebendigen Kräfte und der Flächen.

Es bleibt noch übrig, die Funktion U so zu bestimmen, daß der Gleichung (5) identisch genügt wird, und zu erforschen, was für mechanische Probleme es sind, die einer so bestimmten Funktion entsprechen.

Die bekannten Vorschriften für die Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen lehren, daß U eine beliebige Funktion der Integrale des folgenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen bezeichnen darf:

$$\begin{aligned} & dt : \; dx_1 : \; dx_2 : \cdots : \; dx_n : dy_1 : dy_2 : \cdots : dy_n \\ = & \; \alpha : -y_1 : -y_2 : \cdots : -y_n : \; x_1 : \; x_2 : \cdots : \; x_n . \end{aligned}$$

Diese Integrale sind die Funktionen, die bei der Integration der Gleichungen willkürlichen Konstanten gleich werden. Den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} & dx_1 : \; dx_2 : \cdots : \; dx_n : dy_1 : dy_2 : \cdots : dy_n \\ = & -y_1 : -y_2 : \cdots : -y_n : \; x_1 : \; x_2 : \cdots : \; x_n \end{aligned}$$

wird genügt durch die Gleichungen:

$$x_i = \alpha_i \cos(\varphi + \beta_i), \quad y_i = \alpha_i \sin(\varphi + \beta_i),$$

in denen α_i, β_i, willkürliche Konstanten sind, und φ irgend

eine Funktion von t bezeichnen kann. Diese Funktion wird bestimmt durch die Proportion

$$dt : \alpha = dx_1 : -y_1 = d\varphi : 1,$$

woraus folgt

$$\alpha\varphi = t.$$

Führt man an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten Polarkoordinaten ein, indem man setzt

$$x_i = r_i \cos v_i, \quad y_i = r_i \sin v_i,$$

und schreibt man γ statt der Konstanten $\frac{1}{\alpha}$, so wird

$$\alpha_i = r_i, \quad \beta_i = v_i - \gamma t.$$

Die allgemeinste Form einer Funktion U, die der Gleichung (5) identisch genügt, ist also eine willkürliche Funktion von den r_i und den $v_i - \gamma t = v_i - \frac{t}{\alpha}$, d. h. eine Funktion der auf die (x, y)-Ebene projizierten Entfernungen der materiellen Punkte vom Anfangspunkt und der Winkel, den diese projizierten Entfernungen mit einer Geraden bilden, die in jener Ebene gleichförmig um den Anfangspunkt rotiert. Außerdem kann die Funktion U die Größen z_i in irgend einer Weise enthalten.

Es steht fest, daß den Gleichungen (3) genügt wird, wenn F, Φ, ... Funktionen der r_i und der Differenzen der v_i sind. Wir haben somit den Satz:

Nehmen wir an, daß in den dynamischen Differentialgleichungen (1), wenn man $x_i = r_i \cos v_i$, $y_i = r_i \sin v_i$ setzt, die Funktionen F, Φ, ... außer den Größen z_i, r_i nur die Differenzen der v_i enthalten, daß ferner U eine Funktion der Größen z_i, r_i und $v_i - \gamma t$ ist, wobei γ eine Konstante bedeutet. Dann wird

$$T - U + \gamma \sum m_i \left(y_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dy_i}{dt} \right) = \text{Konst.}$$

ein Integral der Gleichungen (1) sein.

Das gefundene Integral läßt sich auch so schreiben

$$T - U - \gamma \sum m_i r_i^2 \frac{dv_i}{dt} = \text{Konst.} \tag{7}$$

oder auch

$$\tag{8} \tfrac{1}{2}\sum m_i\left\{\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2+r_i^2\left(\frac{dv_i}{dt}-\gamma\right)^2\right\}=\tfrac{1}{2}\gamma^2\sum m_i r_i^2 + U + \text{Konst.}$$

Die linke Seite der Gleichung (8) ist die Summe der lebendigen Kräfte des Systems, vorausgesetzt, daß das System auf bewegliche Achsen der Koordinaten x, y bezogen wird, die in ihrer Ebene gleichförmig um den Anfangspunkt rotieren.

Die Differentialgleichungen (1) lassen sich bekanntlich auch so darstellen

$$\tag{9} \left\{\begin{aligned} m_i\left(\frac{d^2 r_i}{dt^2}-r_i\left(\frac{dv_i}{dt}\right)^2\right) &= \frac{\partial U}{\partial r_i}+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial r_i}+\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial r_i}+\cdots,\\ m_i\frac{d}{dt}\left(r_i^2\frac{dv_i}{dt}\right) &= \frac{\partial U}{\partial v_i}+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial v_i}+\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial v_i}+\cdots,\\ m_i\frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_i}+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial z_i}+\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}+\cdots. \end{aligned}\right.$$

Wird

$$w_i = v_i - \gamma t$$

gesetzt, so ist U eine Funktion der r_i, w_i, z_i, die außer diesen Größen t selbst nicht enthält. Die Gleichungen (9) werden dann

$$\tag{10} \left\{\begin{aligned} m_i\left(\frac{d^2 r_i}{dt^2}-r_i\left(\frac{dw_i}{dt}\right)^2\right) &= \gamma m_i r_i\left(2\frac{dw_i}{dt}+\gamma\right)+\frac{\partial U}{\partial r_i}+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial r_i}+\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial r_i}+\cdots,\\ m_i\frac{d}{dt}\left(r_i^2\frac{dw_i}{dt}\right) &= -\gamma m_i\frac{dr_i^2}{dt}+\frac{\partial U}{\partial w_i}+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial w_i}+\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial w_i}+\cdots,\\ m_i\frac{\partial^2 z_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_i}+\lambda_1\frac{\partial F}{\partial z_i}+\lambda_2\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}+\cdots. \end{aligned}\right.$$

Multipliziert man die drei obigen Gleichungen mit dr_i, dw_i, dz_i und erteilt in den Produkten dem i die Werte $1, 2, \ldots, n$, so liefert die Summe aller leicht das gefundene Integral (8). Denn die beiden mit $r_i\dfrac{dr_i}{dt}\dfrac{dw_i}{dt}$ multiplizierten Glieder zerstören sich gegenseitig, und es wird sein

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial w_i}dw_i = \sum_i \frac{\partial F}{\partial v_i}dv_i, \quad \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial w_i}dw_i = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial v_i}dv_i, \quad \cdots$$

da nach der oben über die Funktionen F, Φ, ... gemachten Voraussetzung identisch

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial v_i} = 0, \quad \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 0, \cdots$$

ist. Differentialgleichungen, die den Gleichungen (10) ähnlich sind, hat der berühmte *Laplace* in seinem Werk über Himmelsmechanik angegeben, als er die wahre Bewegung eines Planeten um seinen eignen Mittelpunkt suchte, während die obigen Formeln für die Frage geeignet sind, wo bei zwei Planetén die wahre Bewegung des einen um den Mittelpunkt des andern betrachtet wird.

Die Funktion U erfreut sich der oben vorgeschriebenen Form, so oft die Punkte m_i sich gegenseitig anziehen und von irgendwievielen Zentren angezogen werden, die um die z-Achse gleichförmig mit gemeinsamer Rotationsgeschwindigkeit rotieren, und auf die weder sie selbst, noch die Punkte m_i wirken. Diese Zentra können auch durch feste Körper von beliebiger äußerer Gestalt und innerer Beschaffenheit ersetzt werden, die um die z-Achse mit derselben konstanten Geschwindigkeit rotieren, und überdies weder voneinander noch von den Punkten m_i gestört werden. In allen diesen Fällen wird das eine angegebene Integral gelten. Solche Fälle bieten sich dar beim Dreikörperproblem, wenn man, was zunächst erlaubt ist, annimmt, daß der Hauptkörper und der störende Körper in einer festen Ebene gleichförmig um ihren gemeinsamen Schwerpunkt rotieren. Das angegebene Integral wird also bei dem Dreikörperproblem hinsichtlich aller Potenzen der Exzentrizität und Neigung des gestörten Körpers und der Masse des störenden Körpers richtig sein, unter Fortlassung der von der Exzentrizität und Neigung des störenden Körpers und der Masse des gestörten Körpers abhängigen Glieder.

Es wird gezeigt, wie sich sowohl durch die Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kräfte als auch durch eine auf die Erhaltung der Flächen bezügliche Gleichung die Ordnung der Integrationen um zwei Einheiten erniedrigt. Das gilt keineswegs für jedes Integral der dynamischen Gleichungen.

§ 56. So oft die Funktion U das t nicht explizite enthält, mithin das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte gilt, erniedrigt das eine Integral, in dem jenes Prinzip enthalten

ist, die Ordnung der Differentiationen um zwei Einheiten. Es seien nämlich wieder die $2m$ folgenden Differentialgleichungen gegeben

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Wenn U und daher auch $H = T - U$ das t nicht enthält, so lassen sich jene Gleichungen so schreiben

$$dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_m : \quad dp_1 : \quad dp_2 : \cdots : \quad dp_m$$
$$= \frac{\partial H}{\partial p_1} : \frac{\partial H}{\partial p_2} : \cdots : \frac{\partial H}{\partial p_m} : -\frac{\partial H}{\partial q_1} : -\frac{\partial H}{\partial q_2} : \cdots : -\frac{\partial H}{\partial q_m}.$$

Das sind $2m - 1$ Differentialgleichungen erster Ordnung, sie vertreten also eine Differentialgleichung $(2m - 1)$-ter Ordnung, die durch das vom Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte gelieferte Integral auf die $(2m - 2)$-te Ordnung reduziert wird. Wenn dagegen U, also auch H, das t enthält, so vertreten die vorgelegten Differentialgleichungen eine Gleichung $2m$-ter Ordnung.

Wenn überdies in bezug auf irgend eine gegebene Ebene das Prinzip von der Erhaltung der Flächen gilt, so wird die Ordnung der Differentiationen wieder um zwei Einheiten herabgedrückt. Dabei wird unter der Ordnung der Differentiationen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen immer verstanden die Ordnung einer Gleichung zwischen zwei Veränderlichen, auf die nach den bekannten Eliminationsregeln das System von Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann, oder die Anzahl der willkürlichen Konstanten, die die vollständige Integration erfordert. Man nehme in der Tat die gegebene Ebene als (x, y)-Ebene an und setze wieder

$$x_i = r_i \cos v_i, \quad y_i = r_i \sin v_i.$$

In dem von uns betrachteten Falle werden die vorgelegten Gleichungen zwar die ersten und zweiten Ableitungen der einzelnen Winkel v_i enthalten, aber nur die Differenzen der v_i. Vermöge des Integrals, das sich im vorliegenden Falle auf das Prinzip der Flächen bezieht, wird, unter α eine willkürliche Konstante verstanden,

$$\alpha = \sum m_i r_i^2 \frac{dv_i}{dt}.$$

Setzt man

$$u_i = v_i - v_n\,, \quad R = \sum m_i r_i^2\,, \quad N = \sum m_i r_i^2 \frac{du_i}{dt}\,,$$

so wird

$$(1) \qquad \alpha = R\frac{dv_n}{dt} + \sum m_i r_i^2 \frac{du_i}{dt} = R\frac{dv_n}{dt} + N.$$

Wenn wir in der Gleichung, die das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte enthält,

$$\sum m_i \left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2 + r_i^2\left(\frac{dv_i}{dt}\right)^2\right\} = U + h,$$

worin h eine willkürliche Konstante ist, die Werte $v_i = u_i + v_n$ einsetzen, so lautet sie:

$$\sum m_i \left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2 + r_i^2\left(\frac{du_i}{dt}\right)^2\right\}$$
$$+ 2\frac{dv_n}{dt}\sum m_i r_i^2 \frac{du_i}{dt} + R\left(\frac{dv_n}{dt}\right)^2 = U + h,$$

oder nach (1):

$$(2) \quad \sum m_i \left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2 + r_i^2\left(\frac{du_i}{dt}\right)^2\right\} + \frac{\alpha^2 - N^2}{R} = U + h.$$

Wenn in den Differentialgleichungen die Werte

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{du_i}{dt} + \frac{\alpha - N}{R}$$

eingesetzt werden, so geht die Größe v_n zugleich mit ihren Ableitungen heraus, da die Bedingungsgleichungen und die Funktion U nur die Größen x_i, r_i, u_i enthalten. Mithin vermindert sich die Zahl der Veränderlichen um eine Einheit und daher die Ordnung der Differentiationen um zwei Einheiten. Allgemein gilt folgendes: So oft man bei den vorgelegten Differentialgleichungen die Veränderlichen so auswählen kann, daß in ihnen eine derselben nicht mehr selbst vorkommt, sondern nur ihre ersten beiden Ableitungen, dann läßt sich allgemein ein neues Integral finden, und nachdem ein neues Integral gefunden ist, erniedrigt sich die Ordnung der Differentiationen um zwei Einheiten. Es sei nämlich in den

oben angegebenen Differentialgleichungen q_i die Veränderliche, die in H nicht auftritt; dann hat man

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

und daher ist

$$p_i = \text{Konst.}$$

ein neues Integral. Wirft man dann die Gleichung

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

fort und betrachtet p_i in den übrigen Differentialgleichungen als eine Konstante, wie es sich ergeben hat, so ist die Zahl der Veränderlichen q, p und daher die Ordnung der Differentiationen um zwei Einheiten vermindert.

Auch in dem im vorigen Paragraphen behandelten Falle, wo das Integral (8) aus § 55 gilt, vermindert sich die Ordnung der Differentiationen um zwei Einheiten. Nimmt man nämlich als Veränderliche r_i, w_i, z_i, $r'_i = \frac{dr_i}{dt}$, $w'_i = \frac{dw_i}{dt}$, $z'_i = \frac{dz_i}{dt}$ an und dividiert die Gleichungen (10) in § 55 alle durch eine unter ihnen, so treten t und das Element dt in den Differentialgleichungen nicht auf, und die Ordnung der Differentiationen vermindert sich um eine Einheit und vermindert sich dann weiter vermöge des Integrals (8) in § 55 noch um eine Einheit. Das geschieht in ganz ähnlicher Weise wie in dem Falle, wo das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte gilt; wie wir gesehen haben, erniedrigt sich dann immer vermöge jenes Prinzips und durch Elimination des Zeitelements die Ordnung der Differentiationen um zwei Einheiten.

Es ist aber nicht in allen Fällen, wo man ein neues Integral hat, ähnlich wie bei den obigen Beispielen möglich, durch passende Auswahl der Veränderlichen die Ordnung der Differentiationen um zwei Einheiten herabzudrücken. So ist es nicht angängig, durch das zweite und dritte auf das Prinzip der Flächen bezügliche Integral zwei Veränderliche mit ihren Ableitungen zu eliminieren und so die Ordnung um vier Einheiten zu vermindern. Die obigen Beispiele sind nur äußerst einfach, und bei ihnen bietet sich auch ohne die oben begründete Theorie jene Erniedrigung der Ordnung der Differentiationen von selbst dar. Die oben begründete Theorie lehrt aber, daß

man immer ein System von Veränderlichen aufspüren kann, für die die Ordnung der Differentiationen um zwei Einheiten niedriger ausfällt. Im allgemeinen jedoch fordert die Ermittelung dieser Veränderlichen nach den gegebenen Vorschriften, daß man andere Systeme von Differentialgleichungen aufstellt, die von niedrigeren Ordnungen sind, und daß man für diese einzelnen Hilfssysteme je ein beliebiges Integral aufsucht.

Das vorgelegte System gewöhnlicher Differentialgleichungen wird ein kanonisches genannt. Ein solches System wird in ein anderes kanonisches transformiert. Dies wird zusammen mit einer sehr allgemeinen Transformation der partiellen Differentialgleichung durchgeführt. Das kanonische System der Elemente.

§ 57. Ich kehre zurück zu den in § 52 angegebenen Störungsformeln. Wir sehen, daß die Gleichungen (7) in § 52, in denen die gestörten Elemente als Veränderliche eingeführt sind, genau dieselbe Form haben wie die Differentialgleichung (5) in § 52. Diese merkwürdige Form, die die beiden Systeme von Differentialgleichungen haben, will ich, weil sie häufig bei solchen Gleichungen vorkommt, die kanonische Form der Differentialgleichungen nennen. In einem derartigen kanonischen System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist die Anzahl der Veränderlichen gerade, und die eine Hälfte der Veränderlichen entspricht der andern einzeln so, daß die Ableitungen der erstgenannten Veränderlichen gleich den partiellen Ableitungen einer gewissen Funktion nach den letzteren sind und die Ableitungen der letzteren gleich den partiellen Ableitungen derselben Funktion nach den erstgenannten Veränderlichen, noch versehen mit dem negativen Zeichen.

Dies festgesetzt ist jene Transformation, durch die, wie wir in §§ 52, 53 gesehen haben, die Gleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial(f+\Omega)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial(f+\Omega)}{\partial q_i}$$

in

$$\frac{db_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_i}, \quad \frac{da_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b_i},$$

verwandelt werden, unter dem folgenden allgemeinen Problem enthalten: Ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das die kanonische Form hat, durch Ein-

führung neuer Veränderlicher in ein anderes von derselben Form zu transformieren. Man kann dieses Problem auch in ganz anderer Weise aussprechen.

Ich habe nämlich oben bewiesen, daß die Integration des Systems von Differentialgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i},$$

wo ich der größeren Allgemeinheit wegen voraussetzen will, daß außer den Größen q_i, p_i auch t in der Funktion f explizite vorkommt, von der Integration einer partiellen Differentialgleichung abhängt, die aus der Gleichung*)

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + f$$

hervorgeht, indem man in der Funktion f an Stelle der Größen p_i die partiellen Ableitungen der Funktion V nach den Größen q_i setzt, d. h.

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

War nämlich eine Funktion V gefunden, die jener partiellen Differentialgleichung genügt und m willkürliche Konstanten a_i enthält außer der einen, die zu V rein additiv hinzuzufügen ist, so waren die vollständigen Integrale der Gleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

folgende:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

wobei die b_i m neue willkürliche Konstanten bedeuten. Wir sehen also, daß zwischen der Integration des kanonischen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen und der partiellen Differentialgleichung die engste Beziehung besteht. Es wird daher die Transformation des einen sogleich auch eine Transformation der andern liefern.

Die Transformation der partiellen Differentialgleichung ist etwas Selbstverständliches, wenn man nur an Stelle der un-

*) Die in § 35 (3) hinzugefügte Konstante a habe ich hier, was erlaubt ist, gleich Null gesetzt.

abhängigen Veränderlichen andere unabhängige Veränderliche einführt. Und bis jetzt scheinen die Analysten keine andern Transformationen betrachtet zu haben*). Es gibt aber auch andere Transformationen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in eine andere von erster Ordnung, durch Substitutionen, bei denen die Ausdrücke der unabhängigen Veränderlichen der einen Gleichung nicht nur die unabhängigen Veränderlichen der andern enthalten, sondern auch die partiellen Ableitungen, die nach ihnen genommen sind. Die allgemeine Methode, eine solche Transformation zu bewirken ist folgende:

Vorgelegt sei die Gleichung

$$(1)\quad dV_1 = -f_1\,dt + p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \cdots + p_m\,dq_m,$$

in der

$$(2)\quad f_1 = -\frac{\partial V_1}{\partial t}$$

eine gegebene Funktion von $q_1, q_2, \ldots, q_m, t$ und von

$$p_1 = \frac{\partial V_1}{\partial q_1},\quad p_2 = \frac{\partial V_1}{\partial q_2},\quad \ldots,\quad p_m = \frac{\partial V_1}{\partial q_m}$$

sein möge. Die Gleichung (1) vertritt die partielle Differentialgleichung (2), und man darf statt der Gleichung (2) die Gleichung (1) transformieren. Um die Transformation zu bewirken, nehme ich eine völlig willkürliche Funktion V von $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ und von neuen Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ an. Diese neuen Veränderlichen bestimme man durch $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ mit Hilfe der Gleichungen

$$(3)\quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1,\quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m$$

und setze außerdem:

$$(4)\quad -\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1,\quad -\frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2,\quad \ldots,\quad -\frac{\partial V}{\partial a_m} = b_m.$$

Dies festgesetzt wird:

$$(5)\quad \begin{cases} dV = \dfrac{\partial V}{\partial t}dt + p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \cdots + p_m\,dq_m \\ \qquad\qquad - b_1\,da_1 - b_2\,da_2 - \cdots - b_m\,da_m. \end{cases}$$

---

*) Ein Beispiel dafür bietet jedoch jene *Euler*sche Methode, bei der die unabhängigen Veränderlichen mit den nach ihnen genommenen Ableitungen vertauscht werden.[27] *Clebsch.*

Subtrahieren wir diese Gleichung von (1) und setzen

$$V_1 - V = W, \tag{6}$$

so erhalten wir:

$$dW = -\left(f_1 + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m. \tag{7}$$

Die allgemeine Transformation der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die im obigen enthalten ist, werde in einem besonderen Theorem ausgesprochen.

Theorem VIII.

Es seien $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ unabhängige Veränderliche, zwischen denen und der Funktion V_1 die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + f_1\left(t, q_1, q_2, \cdots, q_m, \frac{\partial V_1}{\partial q_1}, \frac{\partial V_1}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial V_1}{\partial q_m}\right) = 0$$

vorgelegt ist. Man nehme eine völlig willkürliche Funktion V von $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ und neuen Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ an. An Stelle der Größen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ die Größen

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}, \frac{\partial V}{\partial a_2}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial a_m}$$

einführend, wollen wir die Größen

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial q_m}$$

und, wenn wir in f_1 für $\frac{\partial V_1}{\partial q_i}$ schreiben $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, die Funktion

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f_1\left(t, q_1, q_2, \cdots, q_m, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial q_m}\right)$$

durch die Größen

$$t, a_1, a_2, \cdots, a_m, -\frac{\partial V}{\partial a_1}, -\frac{\partial V}{\partial a_2}, \cdots, -\frac{\partial V}{\partial a_m}$$

ausdrücken. Dadurch werde

$$\frac{\partial V}{\partial t}+f_1\left(t,\, q_1,\, q_2,\, \cdots,\, q_m,\, \frac{\partial V}{\partial q_1},\, \frac{\partial V}{\partial q_2},\, \cdots,\, \frac{\partial V}{\partial q_m}\right)$$
$$=\varphi\left(t,\, a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_m,\, -\frac{\partial V}{\partial a_1},\, -\frac{\partial V}{\partial a_2},\, \cdots,\, -\frac{\partial V}{\partial a_m}\right).$$

Ist dies alles ausgeführt, und setzt man in der Funktion φ für $-\frac{\partial V}{\partial a_i}$ ein $\frac{\partial W}{\partial a_i}$, so wird die vorgelegte partielle Differentialgleichung in folgende transformiert sein:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\varphi\left(t,\, a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_m,\, \frac{\partial W}{\partial a_1},\, \frac{\partial W}{\partial a_2},\, \cdots,\, \frac{\partial W}{\partial a_m}\right)=0,$$

und man findet aus einer Lösung der einen eine Lösung der andern mit Hilfe der Gleichung

$$V_1 = V + W.$$

Ist die Lösung V_1 bekannt, so hat man mit Hilfe der Gleichungen

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_1}=\frac{\partial V}{\partial q_1},\; \frac{\partial V_1}{\partial q_2}=\frac{\partial V}{\partial q_2},\; \cdots,\; \frac{\partial V_1}{\partial q_m}=\frac{\partial V}{\partial q_m}$$

die Veränderlichen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ durch $a_1, a_2, \ldots, a_m, t$ auszudrücken; ist die Lösung W bekannt, so hat man mit Hilfe der Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial a_1}=-\frac{\partial V}{\partial a_1},\; \frac{\partial W}{\partial a_2}=-\frac{\partial V}{\partial a_2},\; \cdots,\; \frac{\partial W}{\partial a_m}=-\frac{\partial V}{\partial a_m}$$

die Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ durch $q_1, q_2, \ldots, q_m, t$ auszudrücken.[28])

Der Beweis des Theorems, den wir oben gegeben haben, stützt sich darauf, daß, wenn man die Gleichungen

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_1}=\frac{\partial V}{\partial q_1},\; \frac{\partial V_1}{\partial q_2}=\frac{\partial V}{\partial q_2},\; \cdots,\; \frac{\partial V_1}{\partial q_m}=\frac{\partial V}{\partial q_m}$$

aufstellt, daraus von selbst die folgenden Gleichungen hervorgehen:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}=-\frac{\partial W}{\partial a_1},\; \frac{\partial V}{\partial a_2}=-\frac{\partial W}{\partial a_2},\; \cdots,\; \frac{\partial V}{\partial a_m}=-\frac{\partial W}{\partial a_m},$$

was sich auch umkehren läßt.

Die allgemeine Transformation eines kanonischen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, die dem vorstehenden Theorem entspricht, ist in folgendem Theorem enthalten:

Theorem IX.

Es sei vorgelegt ein kanonisches System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial q_m},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial p_m}.$$

Dabei ist f_1 eine beliebige Funktion von t, q_1, $q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$. Man nehme eine willkürliche Funktion V der Größen t, $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und der neuen Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ an und stelle dann die Gleichungen auf:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = -b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = -b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_m} = -b_m.$$

Mit ihrer Hilfe drücke man sowohl die Veränderlichen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ als auch die Funktion

$$f_1 + \frac{\partial V}{\partial t}$$

durch t und die neuen Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ aus. Findet man den Ausdruck

$$f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(t, a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_m),$$

so wird das kanonische System gewöhnlicher Differentialgleichungen durch die angegebenen Substitutionen in folgendes andere kanonische System transformiert:

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial b_2}, \quad \ldots, \quad \frac{da_m}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial b_m},$$

$$\frac{db_1}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{db_m}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a_m}.$$

Der Beweis des obigen äußerst wichtigen Theorems ist zwar schon in den oben behandelten Fragen enthalten. Wenn wir ihn aber kurz noch einmal geben sollen, so ist er folgender:

Aus dem vorgelegten kanonischen System fließen die folgenden symbolischen Gleichungen, wenn man sich an die bekannten Formeln

$$\delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d\delta q_i}{dt}, \quad \delta \frac{dp_i}{dt} = \frac{d\delta p_i}{dt}, \quad \delta \frac{dV}{dt} = \frac{d\delta V}{dt}$$

erinnert,

$$\begin{aligned}
\delta f_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t + \sum_i \left(\frac{dq_i}{dt}\delta p_i - \frac{dp_i}{dt}\delta q_i\right) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t + \sum_i \left(\frac{dq_i}{dt}\delta\frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{d\frac{\partial V}{\partial q_i}}{dt}\delta q_i\right) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t + \sum_i \left(\delta\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}\right) - \frac{d\frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i}{dt}\right) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t + \delta\frac{dV}{dt} - \frac{d\delta V}{dt} - \delta\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{d\frac{\partial V}{\partial t}\delta t}{dt} \\
&\quad - \sum_i \left(\delta\left(\frac{\partial V}{\partial a_i}\frac{da_i}{dt}\right) - \frac{d\frac{\partial V}{\partial a_i}\delta a_i}{dt}\right) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t - \delta\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{d\frac{\partial V}{\partial t}\delta t}{dt} \\
&\quad - \sum_i \left(\frac{da_i}{dt}\delta\frac{\partial V}{\partial a_i} - \delta a_i \frac{d\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{d(\varphi - f_1)}{dt}\right)\delta t - \delta(\varphi - f_1) \\
&\quad + \sum_i \left(\frac{da_i}{dt}\delta b_i - \frac{db_i}{dt}\delta a_i\right).
\end{aligned}$$

Da nun aus dem vorgelegten kanonischen System

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t}$$

folgt, so finden wir

$$\delta\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\,\delta t + \sum_i \left(\frac{da_i}{dt}\,\delta b_i - \frac{db_i}{dt}\,\delta a_i\right).$$

Diese symbolische Gleichung liefert das transformierte kanonische System und überdies die Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

die aus jenem folgt.

Drückt man also die Funktion W durch $t, a_1, a_2, \ldots, a_m$ aus, so wird

$$(8)\qquad \frac{\partial W}{\partial t} = -\left(f_1 + \frac{\partial V}{\partial t}\right),\quad \frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1,\ \cdots,\ \frac{\partial W}{\partial a_m} = b_m.$$

Eliminiert man mit Hilfe der Gleichungen (3) und (4) die Größen q_i, p_i aus dem Ausdruck $f_1 + \frac{\partial V}{\partial t}$, so wird er eine Funktion von $t, a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$, und wir wollen setzen

$$f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(t, a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Setzt man nun für die b_i die Ausdrücke $\frac{\partial W}{\partial a_i}$ ein, so wird nach (8)

$$(9)\qquad \frac{\partial W}{\partial t} = -\varphi\left(t, a_1, a_2, \ldots, a_m, \frac{\partial W}{\partial a_1}, \frac{\partial W}{\partial a_2}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial a_m}\right).$$

Das ist die transformierte partielle Differentialgleichung, die an die Stelle der vorgelegten partiellen Differentialgleichung (2) tritt. Durch genau dieselbe Substitution (3) und (4) wird sich das vorgelegte kanonische System gewöhnlicher Differentialgleichungen in ein anderes kanonisches System verwandelt haben.

In der allgemeinen Transformation, die in dem obigen Theorem angegeben ist, ist diejenige enthalten, bei der als

neue Veränderliche die Elemente des angenäherten Problems angenommen werden. Es sei nämlich in jenem Theorem

$$f_1 = f + \Omega, \tag{10}$$

und die Funktionen f und V seien so beschaffen, daß sich, wenn man in f für die p_i die Ausdrücke $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ einsetzt,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -f \tag{11}$$

ergibt. Man kann die Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ als willkürliche Konstanten betrachten, die in die Lösung V der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f = 0$$

eingehen, und daher kann man nach dem, was oben bewiesen ist, $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ als die konstanten Elemente betrachten, die in die vollständigen Integrale

$$\left\{\begin{array}{llll} \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, & \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, & \ldots, & \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m, \\ \frac{\partial V}{\partial a_1} = -b_1, & \frac{\partial V}{\partial a_2} = -b_2, & \ldots, & \frac{\partial V}{\partial a_m} = -b_m \end{array}\right. \tag{12}$$

der Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{array}{llll} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, & \ldots, & \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m}, \\ \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2}, & \ldots, & \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m} \end{array}\right. \tag{13}$$

eingehen. So oft also umgekehrt in den Gleichungen (12) die a_i, b_i als Konstanten betrachtet werden, sind jene Gleichungen (12) die vollständigen Integrale der Gleichungen (13). So oft aber in den Gleichungen (12) die a_i, b_i als Veränderliche betrachtet werden, die an Stelle der q_i, p_i mit Hilfe jener Gleichungen einzusetzen sind, lehrt das angegebene Theorem, daß durch diese Substitution die Gleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial(f + \Omega)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial(f + \Omega)}{\partial q_i}$$

in die folgenden Gleichungen transformiert werden:

$$\frac{da_i}{dt}=\frac{\partial \Omega}{\partial b_i}, \quad \frac{db_i}{dt}=-\frac{\partial \Omega}{\partial a_i}.$$

Wir haben nämlich in dem vorliegenden Falle:

$$\varphi = f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} = f_1 - f = \Omega.$$

Das sind die Differentialformeln der gestörten Elemente, die sich von den oben angegebenen nur dadurch unterscheiden, daß in ihnen $-b_i$ für b_i geschrieben ist. Ein System von Elementen, das in der obigen Weise durch kanonische Differentialgleichungen bestimmt wird, kann man zweckmäßig als kanonisches System von Elementen bezeichnen.[29])

Über die Transformation eines kanonischen Systems von Elementen in ein anderes solches.

§ 58. Im obigen sind die beiden Funktionen, deren partielle Ableitungen bei Bildung des vorgelegten und des transformierten kanonischen Systems zu nehmen sind, voneinander verschieden. So oft aber die Funktion V, die oben willkürlich angenommen werden durfte, t nicht enthält, ist

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

und daher $f_1 = \varphi$, d. h. bei beiden kanonischen Systemen ist die Funktion dieselbe. In diesem Falle enthalten auch die Relationen, vermöge deren sich die neuen Veränderlichen aus den ursprünglichen Veränderlichen bestimmen, t nicht. Sind also die Veränderlichen Elemente des angenäherten Problems, so werden auch die neuen Veränderlichen nur ein anderes System von Elementen desselben angenäherten Problems sein. Wenn wir daher die Differentialformeln der gestörten Elemente wiederum in dieser Weise transformieren, so erhalten wir eine sehr allgemeine Art, ein kanonisches System von Elementen zu transformieren. Wir haben nämlich nach Theorem IX, wenn q_i, p_i, a_i, b_i bezüglich mit a_i, b_i, α_i, β_i vertauscht werden, den folgenden Satz:

Theorem IXa.

Die Differentialformeln der gestörten Elemente seien, unter Ω die Störungsfunktion verstanden,

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b_2}, \quad \ldots, \quad \frac{da_m}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b_m},$$
$$\frac{db_1}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{db_m}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a_m}.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ seien Funktionen der genannten Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$, die von ihnen vermöge der Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_m} = b_m,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} = -\beta_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} = -\beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} = -\beta_m$$

abhängen mögen, wobei φ irgend eine Funktion von $a_1, a_2, \ldots, a_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ bezeichnet. Dann werden die neuen Elemente durch ein ganz ähnliches System von Differentialgleichungen bestimmt:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{d\alpha_m}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_m},$$
$$\frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots, \quad \frac{d\beta_m}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_m}.$$

Die allgemeine Transformation der kanonischen Elemente, die im obigen Theorem mit Hilfe einer willkürlichen Funktion bewirkt wird, kommt auf die bekannte Methode zurück aus der vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung die sogenannte allgemeine Lösung abzuleiten, die eine willkürliche Funktion enthält.[30] Es sei nämlich V eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, auf deren Integration sich nach der hier auseinandergesetzten Theorie das angenäherte Problem reduziert, und V enthalte die willkürlichen Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_m$, so daß

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = -b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = -b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_m} = -b_m$$

endliche Gleichungen des angenäherten Problems sind und die Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ kanonische Elemente.

An Stelle der Lösung V kann man auch $V + \varphi$ schreiben, wenn φ eine Konstante bedeutet. Aus dieser vollständigen Lösung wird die allgemeine abgeleitet, indem man φ gleich einer willkürlichen Funktion der Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ annimmt und die partiellen Ableitungen des Ausdrucks $V + \varphi$ nach $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gleich Null setzt. Nehmen wir an, daß die willkürliche Funktion von $a_1, a_2, \ldots, a_m$ außer diesen Größen noch andere willkürliche Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ enthält. Eliminiert man aus $V + \varphi$ mit Hilfe der Gleichungen

$$-\frac{\partial V}{\partial a_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \quad -\frac{\partial V}{\partial a_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad -\frac{\partial V}{\partial a_m} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_m}$$

die Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m$, so erhält man eine neue Lösung $V + \varphi$, die m andere willkürliche Konstanten enthält. Auch aus dieser lassen sich endliche Gleichungen des angenäherten Problems ableiten, nämlich

$$-\frac{\partial (V + \varphi)}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad -\frac{\partial (V + \varphi)}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots, \quad -\frac{\partial (V + \varphi)}{\partial \alpha_m} = \beta_m.$$

Die Größen α_i kommen in der Funktion $V + \varphi$ nur insofern vor, als sie in den a_i enthalten sind und außer in diesen noch explizite in der Funktion φ. Wir haben aber vorausgesetzt, daß die Ableitungen der Funktion $V + \varphi$ nach den a_i verschwinden. Also ist

$$\frac{\partial (V + \varphi)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i},$$

d. h. die neuen endlichen Gleichungen des Problems lauten:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} = -\beta_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} = -\beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} = -\beta_m,$$

und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ sind neue kanonische Elemente, die sich aus den ursprünglichen mit Hilfe dieser Gleichungen und der oben angenommenen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = -\frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i$$

bestimmen. Werden aber die gefundenen neuen kanonischen Elemente bei dem gestörten Problem als Veränderliche betrachtet, so müssen ihre Ableitungen gleich ähnlichen Ausdrücken werden wie die der ursprünglichen Elemente. Das war zu beweisen.

Die in den obigen Paragraphen angegebene Transformation wird noch allgemeiner gefaßt.

§ 59. Wie großer Allgemeinheit sich aber auch die Transformation einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und die damit zusammenhängende in § 57 auseinandergesetzte Transformation eines kanonischen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erfreuen mag, so gibt es doch andere Transformationen, die jene nicht umfaßt. Es sind nämlich noch die folgenden hinzuzufügen.

Die zu transformierende Gleichung sei wieder

$$dV_1 = -f_1 dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m,$$

wobei f_1 eine gegebene Funktion von t, $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ ist. Es sei auch V wieder eine beliebig gewählte Funktion von t, $q_1, q_2, \ldots, q_m, a_1, a_2, \ldots, a_m$; wir wollen jetzt aber annehmen, daß zwischen diesen Größen noch die Gleichungen

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \ldots$$

stattfinden.

Setzt man dann wieder $V_1 - V = W$, so wird die transformierte Gleichung lauten:

$$dW = -\varphi dt + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m,$$

wenn man setzt:

$$\begin{aligned}
\varphi &= f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \cdots, \\
0 &= p_1 - \frac{\partial V}{\partial q_1} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial q_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} + \cdots, \\
0 &= p_2 - \frac{\partial V}{\partial q_2} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial q_2} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= p_m - \frac{\partial V}{\partial q_m} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial q_m} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_m} + \cdots, \\
b_1 &= \quad - \frac{\partial V}{\partial a_1} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial a_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} + \cdots, \\
b_2 &= \quad - \frac{\partial V}{\partial a_2} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial a_2} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_m &= \quad - \frac{\partial V}{\partial a_m} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial a_m} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} + \cdots.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen, zu denen man noch $F = 0$, $\Phi = 0, \ldots$ hinzuzufügen hat, sind nach Elimination von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die Größen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ durch t und $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ zu bestimmen und ihre Werte in deu Ausdruck von φ einzusetzen.

Will man die Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ vermeiden und doch nichts von der Symmetrie der Formeln einbüßen, so kann man die Transformation auch folgendermaßen fassen. Man nehme zwischen den Größen q_i, a_i, t die Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0, \ldots$ an, deren Anzahl $m - k$ sei, und es seien $r_1, r_2, \ldots, r_k$ beliebige Funktionen von $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, a_1, a_2, \ldots, a_m$. Dann lassen sich $q_1, q_2, \ldots, q_m$ alle durch $t, a_1, a_2, \ldots, a_m$ und die neuen Größen $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ausdrücken, und diese Ausdrücke liefern nach Elimination von $r_1, r_2, \ldots, r_k$ die $m - k$ Gleichungen zwischen $q_1, q_2, \ldots, q_m, a_1, a_2, \ldots, a_m, t$.

Da man die Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0, \ldots$ willkürlich wählen kann, so darf man statt ihrer nunmehr annehmen, daß $q_1, q_2, \ldots, q_m$ willkürliche Funktionen der Größen $t, a_1, a_2, \ldots, a_m, r_1, r_2, \ldots, r_k$ sind. Nachdem sie gewählt sind, sei

$$p_1 \frac{\partial q_1}{\partial r_i} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial r_i} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial r_i} = R_i,$$

$$p_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_i} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_i} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial a_i} = A_i,$$

$$p_1 \frac{\partial q_1}{\partial t} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial t} = T.$$

Es wird hiernach sein

$$\begin{aligned} dV_1 = & \quad - f_1\,dt + p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \cdots + p_m\,dq_m \\ = & - (f_1 - T)dt + R_1\,dr_1 + R_2\,dr_2 + \cdots + R_k\,dr_k \\ & + A_1\,da_1 + A_2\,da_2 + \cdots + A_m\,da_m . \end{aligned}$$

Man nehme jetzt eine Funktion V von $a_1, a_2, \ldots, a_m, r_1, r_2, \ldots, r_k, t$ beliebig an und setze

$$f_1 - T + \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi,$$

$$\frac{\partial V}{\partial r_1} = R_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial r_2} = R_2, \cdots, \qquad \frac{\partial V}{\partial r_k} = R_k,$$

$$A_1 - \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1,\ A_2 - \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2,\ \cdots,\ A_m - \frac{\partial V}{\partial a_m} = b_m.$$

Dann wird sein

$$d(V_1 - V) = dW = -\varphi dt + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m.$$

Aus den $m + k$ Gleichungen

$$p_1 \frac{\partial q_1}{\partial r_i} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial r_i} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial r_i} = R_i = \frac{\partial V}{\partial r_i},$$

$$p_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_i} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_i} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial a_i} = A_i = \frac{\partial V}{\partial a_i} + b_i$$

werden mittels Auflösung linearer Gleichungen $p_1, p_2, \ldots, p_m$ durch $r_1, r_2, \ldots, r_k, a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m, t$ bestimmt, und durch Elimination von $p_1, p_2, \ldots, p_m$ erhält man k Gleichungen zwischen $r_1 . r_2, \ldots, r_k, a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m, t$, mit deren Hilfe $r_1, r_2, \ldots, r_k$ und daher auch $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m$ durch $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m, t$ bestimmt werden können. Diese Werte sind dann in den Ausdruck φ einzusetzen, damit er eine Funktion von $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m, t$ allein wird. Ist aber die Gleichung

$$dV_1 = -f_1 dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$$

in

$$dW = -\varphi dt + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m$$

transformiert, wobei f_1 eine Funktion von $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ und φ eine von $t, a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ ist, so sind gleichzeitig die Gleichungen

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + f_1 = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \varphi = 0$$

ineinander transformiert. Ersetzt man in f_1 die p_i durch die Ausdrücke $\frac{\partial V_1}{\partial q_i}$, in φ die b_i durch die Ausdrücke $\frac{\partial W}{\partial a_i}$, so werden jene Gleichungen partielle Differentialgleichungen, für die wir also jetzt durch die angegebene Methode neue Transformationen gewonnen haben.

Ist $k = m$, so erhält man dieselbe Transformation wie in § 57. Die Transformationen, die wir aus dem obigen für $k < m$ erhalten, liefern auch neue Transformationen der kanonischen Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Und ähnlich wie im vorigen Paragraphen gewinnen wir daraus auch

für die Systeme kanonischer Elemente neue Transformationen. Diese Transformationen will ich, jede auf zwei Weisen, in den folgenden Theoremen aussprechen:[31])

Theorem X.

i bezeichne die Zahlen 1, 2, ..., m, und es sei das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_i}$$

vorgelegt. Man nehme eine willkürliche Funktion V von $t, q_1, q_2, \ldots, q_m$ und den neuen Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ an und denke sich zwischen diesen Größen irgend welche Gleichungen

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \ldots;$$

man stelle ferner die $2m + 1$ folgenden Gleichungen auf:

$$\begin{aligned}
\varphi &= f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \cdots, \\
p_i &= \phantom{f_1 +{}} \frac{\partial V}{\partial q_i} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial q_i} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \cdots, \\
-b_i &= \phantom{f_1 +{}} \frac{\partial V}{\partial a_i} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial a_i} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} - \cdots.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen, wozu man noch $F = 0$, $\Phi = 0, \ldots$ hinzunimmt, lassen sich die Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eliminieren, und bestimmen sich die $2m$ Größen q_i, p_i sowie die Funktion φ durch t und durch die $2m$ neuen Größen a_i, b_i. Setzt man diese Werte der q_i, p_i in das vorgelegte System gewöhnlicher Differentialgleichungen ein, so transformiert es sich in folgendes:

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial b_i}, \quad \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a_i}.$$

Wenn man ferner an Stelle von p_i, b_i schreibt $\frac{\partial V_1}{\partial q_i}$, $\frac{\partial W}{\partial a_i}$ und die partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + f_1 = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \varphi = 0$$

aufstellt, so wird eine Lösung der einen aus einer Lösung der andern erhalten durch die Gleichung

$$V_1 = V + W.$$

Theorem XI.

i bezeichne die Zahlen 1, 2, ..., m, und es seien die Ableitungen der Elemente eines gestörten Problems durch die Gleichungen

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b_i}, \quad \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a_i}$$

gegeben, wobei Ω die Störungsfunktion bedeutet. Man nehme eine willkürliche Funktion V der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und der neuen Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ an; man stelle ferner die folgenden $2m$ Gleichungen auf:

$$b_i = \frac{\partial V}{\partial a_i} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial a_i} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} - \cdots,$$

$$-\beta_i = \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} - \cdots.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen, wozu man noch $F = 0$, $\Phi = 0$, ... hinzunimmt, lassen sich die Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eliminieren, und bestimmen sich die $2m$ Elemente a_i, b_i durch das neue System von Elementen α_i, β_i. Führt man auch in der Störungsfunktion Ω diese neuen Elemente an Stelle der a_i, b_i ein, so findet man die Ableitungen der Elemente α_i, β_i des neuen Systems durch die Formeln:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_i}.$$

Das vorstehende Theorem wird aus Theorem X erhalten, indem man annimmt, daß V, F, Φ, ... das t nicht enthalten, und p_i, q_i mit b_i, a_i und b_i, a_i mit β_i, α_i vertauscht. Die obigen Theoreme können auch folgende andere Form annehmen:

Theorem Xa.

i bezeichne die Zahlen 1, 2, ..., m, und es sei das System gewöhnlicher Differentialgleichungen vorgelegt:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_i}.$$

Man setze die Größen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ gleich irgendwelchen Ausdrücken in t und in den neuen Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m, r_1, r_2, \ldots, r_k$, wobei k eine Zahl bezeichnet, die gleich m oder kleiner als m ist. Darauf wähle man eine willkürliche Funktion V derselben Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m, r_1, r_2, \ldots, r_k, t$ und stelle die $m+k$ Gleichungen auf:

$$\frac{\partial V}{\partial r_i} = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial r_i} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial r_i} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial r_i},$$

$$b_i + \frac{\partial V}{\partial a_i} = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_i} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_i} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial a_i}.$$

Mit ihrer Hilfe bestimme man die Größen $r_1, r_2, \ldots, r_k, p_1, p_2, \ldots, p_m$ durch die Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m, t$, so daß auch die Größen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ durch dieselben Größen bestimmt sein werden. Man setze diese Ausdrücke für die Größen r_i, q_i, p_i ein und stelle auch die Funktion

$$\varphi = f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} - \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial t} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial t}\right)$$

durch die Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m, t$ dar. Ist das geschehen, und setzt man die gefundenen Ausdrücke von $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ durch $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m, t$ in das vorgelegte System von Differentialgleichungen ein, so erhält man folgendes System von ähnlicher Form:

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial b_i}, \quad \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a_i}.$$

Zugleich transformieren sich die partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + f_1 = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \varphi = 0,$$

die man erhält, indem man in der einen p_i durch $\frac{\partial V_1}{\partial q_i}$, in der andern b_i durch $\frac{\partial W}{\partial a_i}$ ersetzt, vermöge derselben Gleichungen ineinander, und man bekommt eine Lösung der einen aus einer der andern mit Hilfe der Gleichung

$$V_1 = W + V.$$

Theorem XIa.

i bezeichne die Zahlen 1, 2, ..., m, und es seien die Ableitungen der Elemente eines gestörten Problems durch die Gleichungen

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b_i}, \quad \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a_i}$$

gegeben, wobei Ω die Störungsfunktion bedeutet. Man setze die Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gleich irgendwelchen Ausdrücken in den $m+k$ neuen Größen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k,$$

wobei k eine Zahl bezeichnet, die gleich m oder kleiner als m ist. Man wähle ferner eine willkürliche Funktion V derselben $m+k$ Größen und bilde die $m+k$ Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i} = b_1 \frac{\partial a_1}{\partial \varepsilon_i} + b_2 \frac{\partial a_2}{\partial \varepsilon_i} + \cdots + b_m \frac{\partial a_m}{\partial \varepsilon_i},$$

$$\beta_i + \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = b_1 \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_i} + b_2 \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_i} + \cdots + b_m \frac{\partial a_m}{\partial \alpha_i}.$$

Mit ihrer Hilfe bestimme man die $m+k$ Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, b_1, b_2, \ldots, b_m$ durch die $2m$ neuen Größen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m,$$

so daß auch $a_1, a_2, \ldots, a_m$ durch dieselben Größen bestimmt sein werden. Setzt man diese Ausdrücke der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ durch die neuen Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ in die Störungsfunktion Ω ein, so erhält man die

Ableitungen des neuen Systems von Elementen durch ähnliche Formeln:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_i}.$$

Diese zweite Form der Theoreme ist bequemer, so oft man bei der ersten Form eine sehr große Zahl von Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0$, ... hat.

Über einen sehr einfachen Fall aus einem kanonischen System von Elementen ein anderes derartiges System zu erhalten.

§ 60. Ich will kurz über ganz einfache, aber doch sehr häufig anzuwendende Transformationen eines kanonischen Systems von Elementen in ein anderes kanonisches System sprechen. Kanonische Elemente sind solche, deren Ableitungen durch Gleichungen folgender Art ausgedrückt werden:

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b_i}, \quad \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a_i}.$$

Die Integration dieser Gleichungen kommt zurück auf die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \Omega,$$

wenn man in der Störungsfunktion Ω für $b_1, b_2, \ldots, b_m$ einsetzt $\frac{\partial V}{\partial a_1}, \frac{\partial V}{\partial a_2}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial a_m}$. Man kann auch sagen, daß die Integration der obigen gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückkommt auf die Integration der Gleichung

$$dV = -\Omega\, dt + b_1\, da_1 + b_2\, da_2 + \cdots + b_m\, da_m.$$

Wir wollen das kanonische System von Elementen in zwei Klassen teilen. Die eine, die $a_1, a_2, \ldots, a_m$ umfaßt, nennen wir die positive Klasse, die andere, die $b_1, b_2, \ldots, b_m$ umfaßt, die negative Klasse. Die beiden Elemente a_i und b_i wollen wir konjugiert nennen. Zwei konjugierte Elemente des Systems gehen gleichzeitig aus der einen in die andere Klasse über, wenn man das Zeichen des einen Elements ändert. Will man irgendwelche Funktionen der Elemente,

die sich nur auf die eine Klasse beziehen, als neue Elemente jener Klasse einführen, so bestimmen sich leicht die Elemente der andern Klasse, die zu jenen neuen konjugiert sind. Es seien z. B. die Elemente der positiven Klasse a_1, a_2, ..., a_m ausgedrückt durch andere Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, die als neue Elemente der positiven Klasse angesehen werden. Setzt man

$$\beta_i = b_1 \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_i} + b_2 \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_i} + \cdots + b_m \frac{\partial a_m}{\partial \alpha_i},$$

so wird sein

$$dV = -\Omega\, dt + \beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2 + \cdots + \beta_m d\alpha_m .$$

Es müssen also die Größen β_i als neue Elemente der andern Klasse betrachtet werden, und das Element β_i wird zu α_i konjugiert sein, d. h. es wird sein:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_i} = \frac{d\alpha_i}{dt}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_i} = -\frac{d\beta_i}{dt}.$$

Man darf in dem vorstehenden Satze an Stelle von a_i, α_i setzen $-b_i$, $-\beta_i$ und zugleich an Stelle von b_i, β_i setzen a_i, α_i. Daraus fließt der folgende andere Satz: Sind die Elemente b_i durch andere Elemente β_i ausgedrückt, so werden die zu den β_i konjugierten Elemente der positiven Klasse

$$\alpha_i = a_1 \frac{\partial b_1}{\partial \beta_1} + a_2 \frac{\partial b_2}{\partial \beta_2} + \cdots + a_m \frac{\partial b_m}{\partial \beta_m} .$$

Wenn man diese Art der Transformation zusammen mit derjenigen, die durch den bloßen Zeichenwechsel eines oder mehrerer Elemente bewirkt wird, abwechselnd wieder und wieder anwendet, so kann man schon auf diesem einfachen Wege aus einem kanonischen System von Elementen die verschiedensten andern ableiten.

Um durch die oben angegebene allgemeine Methode jene einfache Transformation zu erhalten, bei der zwei konjugierte Elemente, z. B. a_1 und b_1, ihre Klassen wechseln, setze man

$$V_0 = a_1 \alpha_1, \quad b_1 = \frac{\partial V_0}{\partial a_1} = \alpha_1 .$$

Dann wird sein:

$$d(V - V_0) = -\Omega\, dt - a_1 d\alpha_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_m da_m .$$

Diese Gleichung lehrt, daß, wenn man für a_1 einführt $\alpha_1 = b_1$, das konjugierte Element, welches b_1 war, $-a_1$ wird, was zu beweisen war.

Die obigen Transformationen werden dadurch, daß auch t geändert wird, zur vollen Allgemeinheit gebracht.

§ 61. Wir haben in den §§ 57, 59 die Allgemeinheit der Transformationen der partiellen Differentialgleichungen dadurch beschränkt, daß wir die eine der unabhängigen Veränderlichen ungeändert ließen. Wenn wir diese Einschränkung fallen lassen, gestaltet sich die Sache so:

Es sei wieder

$$dV_1 = -f_1\,dt + p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \cdots + p_m\,dq_m$$

und V eine willkürliche Funktion von $q_1, q_2, \ldots, q_m, t$ und von den neuen Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m, \tau$. Dann wird die transformierte Gleichung

$$d(V_1 - V) = -\frac{\partial V}{\partial \tau}\,d\tau + b_1\,da_1 + b_2\,da_2 + \cdots + b_m\,da_m,$$

falls man setzt:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -f_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$
$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = -b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = -b_2, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a_m} = -b_m.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen sind $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ durch $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m, \tau$ zu bestimmen, und die ermittelten Werte sind in den Ausdruck $\frac{\partial V}{\partial \tau}$ einzusetzen, worauf dann

$$d(V_1 - V) = -\frac{\partial V}{\partial \tau}\,d\tau + b_1\,da_1 + b_2\,da_2 + \cdots + b_m\,da_m$$

die transformierte Gleichung sein wird. Wenn man wie in § 59 zwischen $q_1, q_2, \ldots, q_m, t, a_1, a_2, \ldots, a_m, \tau$ die Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0, \ldots$ einführt, so ändert sich an dem obigen nichts, außer daß für V zu setzen ist $V - \lambda_1 F - \lambda_2 \Phi - \cdots$; die partiellen Ableitungen dieses Ausdrucks enthalten nicht die Ableitungen der Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, da diese mit den verschwindenden Ausdrücken $F, \Phi, \ldots$ multipliziert sind.

Um aus dem obigen allgemeineren Satze den Fall abzuleiten, wo die unabhängige Veränderliche t ungeändert bleibt, schreibe man an Stelle von V den Ausdruck

$$V + (\tau - t) f_1,$$

wo V eine von t freie Funktion bezeichnet. Hierauf geht die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} = - f_1$$

über in

$$(\tau - t)\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0,$$

woraus man ableitet

$$\tau = t.$$

Wirft man daher nach Ausführung der Differentiationen die mit $\tau - t$ multiplizierten Glieder als verschwindend fort, so geht, wenn V in $V + (\tau - t) f_1$ verwandelt wird, $\frac{\partial V}{\partial \tau}$ in $\frac{\partial V}{\partial \tau} + f_1$ über und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial q_i}, \frac{\partial V}{\partial a_i}$ ändern sich nicht. Setzt man also zuletzt t an Stelle von τ, so ist leicht zu erkennen, wie man das in den vorigen Paragraphen Gesagte aus dem obigen allgemeineren Satze ableitet.

Wenn die vorgelegte partielle Differentialgleichung die gesuchte Funktion V_1 selbst enthält, so muß man folgendermaßen verfahren. Es sei

$$dV = - f\,dt + p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \cdots + p_m\,dq_m,$$

und f enthalte außer den Veränderlichen $t, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ noch V selbst. Man nehme irgend eine Funktion W von $V, t, q_1, q_2, \ldots, q_m, a_1, a_2, \ldots, a_m, \tau$ an. Dann wird sein

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \tau} d\tau + b_1\,da_1 + b_2\,da_2 + \cdots + b_m\,da_m,$$

falls man setzt

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial W}{\partial V} f, \quad \frac{\partial W}{\partial q_1} = -\frac{\partial W}{\partial V} p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = -\frac{\partial W}{\partial V} p_2, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_m} = -\frac{\partial W}{\partial V} p_m,$$

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial a_m} = b_m.$$

Aus diesen $2m + 1$ Gleichungen sind unter Zuhilfenahme des willkürlich angenommenen Ausdrucks der Funktion W die Größen $V, t, q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ durch $W, \tau,$

$a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ zu bestimmen und die gefundenen Werte in den Ausdruck von $\frac{\partial W}{\partial \tau}$ einzusetzen, worauf die obige Differentialgleichung die transformierte Gleichung sein wird. Nimmt man an, daß zwischen $V, t, q_1, q_2, \cdots, q_m,$ $\tau, a_1, a_2, \ldots, a_m$ die Gleichungen $F = 0$, $\Phi = 0, \ldots$ stattfinden, so braucht man nur im obigen an die Stelle von W zu setzen $W + \lambda_1 F + \lambda_2 \Phi + \cdots$.

Dies ist das allgemeinste, was man über die Transformation der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in irgend einer Zahl von Veränderlichen sagen kann.[32])

Über die Anwendung eines beliebigen Integrals des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, das sich nicht in die Reihe von Integralen einordnet, welche die oben auseinandergesetzte Methode fordert.

§ 62. Ich habe oben in § 56 bemerkt, daß, wenn das Prinzip von der Erhaltung der Flächen in bezug auf eine gewisse Ebene gilt, eine Veränderliche mit ihrer Ableitung gänzlich aus den Differentialgleichungen verschwindet und daher die Ordnung der Differentiationen sich um zwei Einheiten vermindert. Ich habe aber auch bemerkt, daß dies zwar für jenes eine Integral geschieht, nicht aber für das zweite und dritte Integral, das vorhanden ist, wenn das Prinzip der Erhaltung der Flächen in bezug auf j e d e Ebene gilt. Wir wollen uns nunmehr fragen, welcher Nutzen sich denn sonst aus jenen drei Integralen ziehen läßt bei dem Verlauf der Integration, den wir oben auseinandergesetzt haben. Zu diesem Zweck schicke ich die folgenden allgemeinen Betrachtungen voraus. Vorher aber will ich das allgemeine Integrationsverfahren, wie es sich aus den obigen Auseinandersetzungen ergibt, kurz wiederholen.

Es werde verlangt die Integration der Differentialgleichungen

$$dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_m : \quad dp_1 : \quad dp_2 : \cdots \quad dp_m$$
$$= \frac{\partial f}{\partial p_1} : \frac{\partial f}{\partial p_2} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial p_m} : - \frac{\partial f}{\partial q_1} : - \frac{\partial f}{\partial q_2} : \cdots - \frac{\partial f}{\partial q_m},$$

wobei f eine gegebene Funktion von $q_1, q_2, \cdots, q_m, p_1, p_2, \cdots, p_m$ ist. Dann hätte man nach den oben gegebenen Vorschriften so zu verfahren.

Ein **erstes** Integral hat man von selbst in der Gleichung

$$f = a,$$

wo a eine willkürliche Konstante ist. Ein **zweites** Integral $H_1 = a_1$ hat man, wenn eine Funktion H_1 gegeben wird, die identisch der Gleichung

$$(1) \qquad 0 = [H_1, f]$$

genügt, falls man immer setzt

$$[\varphi, \psi] = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m}.$$

Nun ist nach den gegebenen Vorschriften nicht etwa irgend ein drittes Integral zu ermitteln, d. h. irgend eine Funktion H_2, die der Gleichung

$$[H_2, f] = 0$$

genügt, sondern eine solche Funktion H_2, die den beiden Gleichungen

$$(2) \qquad [H_2, f] = 0, \quad [H_2, H_1] = 0$$

gleichzeitig genügt. Darauf wird eine Funktion H_3 zu ermitteln sein, die den drei Gleichungen

$$[H_3, f] = 0, \quad [H_3, H_1] = 0, \quad [H_3, H_2] = 0,$$

eine Funktion H_4, die den vier Gleichungen

$$[H_4, f] = 0, \quad [H_4, H_1] = 0, \quad [H_4, H_2] = 0, \quad [H_4, H_3] = 0$$

genügt, usw., schließlich eine Funktion H_{m-1}, die den $m-1$ Gleichungen

$$[H_{m-1}, f] = 0, \quad [H_{m-1}, H_1] = 0, \ \ldots, \ [H_{m-1}, H_{m-2}] = 0$$

genügt. Sind diese Funktionen gefunden, so ist die vollständige Integration der vorgelegten Differentialgleichungen auf reine Quadraturen zurückgeführt. Es sind nämlich m Integrale der vorgelegten Differentialgleichungen die Gleichungen

$$f = a, \quad H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \ \ldots, \ H_{m-1} = a_{m-1}$$

selbst; aus ihnen bestimmen sich $p_1, p_2, \ldots, p_m$ durch $q_1, q_2, \ldots, q_m$, und man erhält dann die $m-1$ übrigen Integrale durch die Formeln:

$$\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial a_1}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial a_1}dq_2+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial a_1}dq_m\right)+b_1 \quad =0,$$
$$\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial a_2}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial a_2}dq_2+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial a_2}dq_m\right)+b_2 \quad =0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial a_{m-1}}dq_1+\frac{\partial p_2}{\partial a_{m-1}}dq_2+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial a_{m-1}}dq_m\right)+b_{m-1}=0.$$

Hier sind die Ausdrücke unter dem Integralzeichen vollständige Differentiale, deren Integration nur Quadraturen erfordert. Die Größen $a, a_1, \ldots, a_{m-1}, b, b_1, \ldots, b_{m-1}$ sind willkürliche Konstanten.

Die Gleichungen, durch die die Funktion H_i definiert wird, kann man nach dem, was ich oben in § 32 bewiesen habe, auf verschiedene Weisen transformieren. Man kann nämlich in den Gleichungen

$$[H_i, f]=0, \quad [H_i, H_1]=0, \ldots, [H_i, H_{i-1}]=0$$

an Stelle der Funktionen $f, H_1, H_2, \ldots, H_{i-1}$ beliebige andere setzen, in die jene sich mit Hilfe der Gleichungen $f=a$, $H_1=a_1$, $H_2=a_2$, $\ldots$, $H_{i-1}=a_{i-1}$ überführen lassen; ebenso darf man voraussetzen, daß mit Hilfe dieser Gleichungen aus der gesuchten Funktion H_i die Größen p_1, $p_2, \ldots, p_i$ eliminiert seien. Man nehme an, daß mit Hilfe der genannten Gleichungen aus f die Größen $p_1, p_2, \ldots, p_i$ alle außer p_1 eliminiert seien, aus H_1 alle außer $p_2, \ldots,$ aus H_{i-1} alle außer p_i, indem bei Ausführung der einzelnen Eliminationen die einzelnen Gleichungen $f=a$, $H_1=a_1, \ldots,$ $H_{i-1}=a_{i-1}$ bezüglich beiseite gelassen werden. Dann werden die Gleichungen, denen H_i genügen muß, folgende:

$$\begin{aligned}0=[H_i, f] &= \frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1}+\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m}\\ &\quad -\frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial q_{i+1}}-\cdots-\frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial f}{\partial q_m},\\ 0=[H_i, H_1] &= \frac{\partial H_i}{\partial q_2}\frac{\partial H_1}{\partial p_2}+\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial H_1}{\partial p_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_1}{\partial p_m}\\ &\quad -\frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial H_1}{\partial q_{i+1}}-\cdots-\frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_1}{\partial q_m},\end{aligned}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0=[H_i, H_{i-1}]=\frac{\partial H_i}{\partial q_i}\frac{\partial H_{i-1}}{\partial p_i}+\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial H_{i-1}}{\partial p_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_{i-1}}{\partial p_m}$$
$$-\frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial H_{i-1}}{\partial q_{i+1}}-\cdots-\frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_{i-1}}{\partial q_m}.$$

Es sei aus $f=a$ das p_1, aus $H_1=a_1$ das $p_2, \ldots$, aus $H_{i-1}=a_{i-1}$ das p_i durch $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_m$ ausgedrückt. Dann können die obigen Gleichungen auch so geschrieben werden:

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_1}=\frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial p_1}{\partial p_m}\frac{\partial H_i}{\partial q_m}$$
$$-\frac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}}-\cdots-\frac{\partial p_1}{\partial q_m}\frac{\partial H_i}{\partial p_m},$$
$$\frac{\partial H_i}{\partial q_2}=\frac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial p_2}{\partial p_m}\frac{\partial H_i}{\partial q_m}$$
$$-\frac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}}-\cdots-\frac{\partial p_2}{\partial q_m}\frac{\partial H_i}{\partial p_m},$$

. . . .

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_i}=\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial p_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_i}{\partial q_m}$$
$$-\frac{\partial p_i}{\partial q_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial p_{i+1}}-\cdots-\frac{\partial p_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_i}{\partial p_m}.$$

Das sind die Gleichungen (d) des § 17, deren gleichzeitige Integration ich oben in §§ 19, 20 gelehrt habe, indem ich zuerst eine Funktion suchte, die der ersten Gleichung, dann eine, die den beiden ersten, dann eine, die den drei ersten Gleichungen genügt, usw. Es kann manchmal vorkommen, daß man zweckmäßiger einen andern Weg zur Bestimmung der Funktionen H_i einschlägt; hierfür will ich ein ganz einfaches Beispiel anführen.

§ 63. Die gleichzeitige Integration zweier Gleichungen kommt in der obigen Theorie zum ersten Male vor bei der Ermittelung der Funktion H_2, die den beiden Gleichungen

$$[H_2, f]=0, \quad [H_2, H_1]=0$$

zugleich genügen muß. Nach dem vorigen Paragraphen sind diese beiden Gleichungen mit Hilfe der bereits gefundenen

Integrale $f = a$, $H_1 = a_1$ in zwei andere zu transformieren. Wir wollen nun aber annehmen, daß man außer jenen beiden Integralen $f = a$, $H_1 = a_1$ noch ein drittes Integral

$$\varphi = \text{Konst.}$$

der vorgelegten Differentialgleichungen hat, so daß identisch

$$[\varphi, f] = 0$$

ist. Dann ist jene Transformation nicht anzuwenden, sondern der folgende Weg zur Ermittelung von H_2 einzuschlagen.

Hat man $[\varphi, H_1] = 0$, so kann man $H_2 = \varphi$ setzen, und es ist also keine weitere Untersuchung mehr nötig. Den Fall, daß $[\varphi, H_1]$ sich auf einen numerischen Wert, z. B. ± 1, reduziert oder allgemeiner auf eine Funktion von f, H_1 werden wir im folgenden ausschließen, da es dann zweckmäßig ist, die oben mitgeteilte Methode festzuhalten, und das dritte gefundene Integral nicht zur Verwendung kommen wird. Dies vorausgesetzt läßt sich nach der folgenden Methode aus der Funktion φ eine andere H_2 ableiten, für die wie für φ selbst $[H_2, f] = 0$ ist, zugleich aber auch $[H_2, H_1] = 0$. Setzen wir

$$[\varphi, H_1] = A_1, \quad [A_1, H_1] = A_2, \quad [A_2, H_1] = A_3, \ldots$$

und fahren wir in der Bildung neuer Funktionen so lange fort, bis wir zu einer Funktion $[A_{k-1}, H_1] = A_k$ gelangen, die eine Funktion der vorhergehenden $f, H_1, \varphi, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ ist:

$$A_k = \Psi(f, H_1, \varphi, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1});$$

diese Funktion enthält außerdem keine von den Veränderlichen q_i, p_i. Es sei F irgend eine andere Funktion der Größen $f, H_1, \varphi, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$. Dann behaupte ich z u n ä c h s t, daß man identisch hat

$$[F, f] = 0.$$

In der Tat folgt aus der allgemeinen Identität (Theorem V, § 26)

$$[[\psi, f], H_1] + [[f, H_1], \psi] + [[H_1, \psi], f] = 0$$

in unserem Falle, wo $[f, H_1] = 0$ ist, die Gleichung:

$$[[\psi, f], H_1] + [[H_1, \psi], f] = 0.$$

Setzt man in ihr an Stelle von ψ der Reihe nach φ, A_1, A_2, A_3, ..., so folgen, da nach der Voraussetzung auch $[\varphi, f] = 0$ ist, nacheinander die Gleichungen

$$[A_1, f] = 0, \quad [A_2, f] = 0, \ldots, [A_{k-1}, f] = 0.$$

Ferner wird

$$[F,\ f] = \frac{\partial F}{\partial f}[f,\ f] + \frac{\partial F}{\partial H_1}[H_1,\ f] + \frac{\partial F}{\partial \varphi}[\varphi,\ f]$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial A_1}[A_1,\ f] + \cdots + \frac{\partial F}{\partial A_{k-1}}[A_{k-1},\ f].$$

Da die mit den einzelnen partiellen Ableitungen von F multiplizierten Ausdrücke identisch verschwinden, so wird $[F,\ f] = 0$, was zu beweisen war.

Man hat zweitens

$$[F,\ H_1] = \frac{\partial F}{\partial f}[f,\ H_1] + \frac{\partial F}{\partial H_1}[H_1,\ H_1] + \frac{\partial F}{\partial \varphi}[\varphi,\ H_1]$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial A_1}[A_1,\ H_1] + \cdots + \frac{\partial F}{\partial A_{k-1}}[A_{k-1},\ H_1].$$

Wegen

$$[f,\ H_1] = [H_1,\ H_1] = 0,$$
$$[\varphi,\ H_1] = A_1,\quad [A_1,\ H_1] = A_2,\ \ldots,\ [A_{k-1},\ H_1] = A_k = \Psi$$

ist also

$$[F,\ H_1] = \frac{\partial F}{\partial \varphi}A_1 + \frac{\partial F}{\partial A_1}A_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial A_{k-2}}A_{k-1} + \frac{\partial F}{\partial A_{k-1}}\Psi.$$

Man gewinnt daher eine Funktion F, die den beiden Gleichungen

$$[F,\ f] = 0,\quad [F,\ H_1] = 0$$

gleichzeitig genügt, indem man eine Funktion F von φ, A_1, A_2, ..., A_{k-1} aufsucht, die bewirkt, daß identisch

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}A_1 + \frac{\partial F}{\partial A_1}A_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial A_{k-2}}A_{k-1} + \frac{\partial F}{\partial A_{k-1}}\Psi = 0$$

wird. In dieser Gleichung ist Ψ eine gegebene Funktion von φ, A_1, A_2, ..., A_{k-1}. Bei Aufsuchung von F können f, H_1 als Konstanten betrachtet werden, da nach ihnen die gesuchte Funktion F nicht differentiiert wird. Man darf daher in Ψ für f, H_1 auch deren konstante Werte a, a_1 setzen.

Nach bekannten Regeln hat man F, wenn $F =$ Konst. ein Integral der Gleichungen

$$d\varphi : dA_1 : dA_2 : \cdots : dA_{k-2} : dA_{k-1}$$
$$= A_1 : A_2 : A_3 : \cdots : A_{k-1} : \Psi$$

ist; dieses System vertritt eine Differentialgleichung $(k-1)$-ter Ordnung zwischen zwei Veränderlichen. Diese kann man, indem man das Element $d\tau$ einführt, auch durch folgende Gleichung k-ter Ordnung darstellen:

$$\frac{d^k \varphi}{d\tau^k} = \Psi,$$

vorausgesetzt, daß man in dem Ausdruck von Ψ an Stelle von $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$ setzt $\frac{d\varphi}{d\tau}, \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}, \cdots, \frac{d^{k-1}\varphi}{d\tau^{k-1}}$. Ist $F =$ Konst. ein Integral dieser Gleichung, so findet man die gesuchte Funktion H_2, indem man in F an Stelle von $\frac{d\varphi}{d\tau}$, $\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}, \cdots, \frac{d^{k-1}\varphi}{d\tau^{k-1}}$ wieder die Werte $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ einsetzt. Bei dieser Frage ist es von Nutzen, daß man aus den beiden Integralen $H_1 = a_1$, $\varphi =$ Konst. ebensoviele neue Integrale der vorgelegten Differentialgleichungen ableiten kann als die Ordnung der Differentialgleichung beträgt, von der man zur Bestimmung der Funktion $H_2 = F$ ein Integral finden muß. Wir haben nämlich gesehen, daß man, wenn $k-1$ jene Ordnung ist, die neuen Integrale

$$A_1 = \text{Konst.}, \quad A_2 = \text{Konst.}, \ldots, A_{k-1} = \text{Konst.}$$

hat, die voneinander und von den drei gegebenen Integralen unabhängig sind. Es wird daher der Nachteil einer höheren Integration gewissermaßen kompensiert.

Aus dem Obigen geht folgendes hervor: Wenn auch das Integral $\varphi =$ Konst. nicht das ist, das in der Reihe der Integrale, die nach der von mir auseinandergesetzten Methode nacheinander zu ermitteln sind, als drittes Integral benutzt werden kann, so hilft doch die Kenntnis dieses Integrals sehr viel zur Auffindung des dritten Integrals $H_2 =$ Konst., vorausgesetzt, daß der Ausdruck $[H_1, \varphi]$ sich nicht auf eine von Null verschiedene Zahl reduziert und auch nicht auf eine Funktion von f, H_1.[33])

Das Obige wird darauf angewandt zu ermitteln, welchen Nutzen die drei auf die Erhaltung der Flächen bezüglichen Integrale bei der Integration der dynamischen Gleichungen nach der oben angegebenen Methode haben.

§ 64. Nach Vorausschickung der obigen allgemeinen Betrachtungen kehre ich zu dem Gegenstand zurück. Wir fragen nach dem Nutzen, der sich bei unserer Integration aus den drei Integralen ziehen läßt, die das Prinzip der Erhaltung der Flächen betreffen. Bei den Anwendungen auf die Dynamik ist $f = a$ die Gleichung, in der das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte enthalten ist. Es seien $H_1 = a_1$, $\varphi =$ Konst. zwei von den drei Gleichungen, die das Prinzip der Flächen ausmachen, es sei also, wenn die drei Ausdrücke

$$\sum m_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt} - z_i\frac{dy_i}{dt}\right), \quad \sum m_i\left(z_i\frac{dx_i}{dt} - x_i\frac{dz_i}{dt}\right),$$
$$\sum m_i\left(x_i\frac{dy_i}{dt} - y_i\frac{dx_i}{dt}\right)$$

durch $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ ausgedrückt sind,

$$\sum m_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt} - z_i\frac{dy_i}{dt}\right) = \varphi,$$
$$\sum m_i\left(z\frac{dx_i}{dt} - x_i\frac{dz_i}{dt}\right) = \psi,$$
$$\sum m_i\left(x_i\frac{dy_i}{dt} - y_i\frac{dx_i}{dt}\right) = H_1.$$

Ich habe oben in § 51 (4) bewiesen, daß

$$[\varphi, \psi] = H_1, \quad [\psi, H_1] = \varphi, \quad [H_1, \varphi] = \psi$$

ist. Hiernach wird nach den im vorigen Paragraphen gegebenen Vorschriften, wenn man $[\varphi, H_1] = A_1$, $[A_1, H_1] = A_2$ setzt, $A_1 = -\psi$, $A_2 = -\varphi$ und daher $k = 2$, $A_k = \Psi = -\varphi$.

Jetzt ist zu setzen

$$d\varphi : dA_1 = A_1 : A_2$$

oder

$$d\varphi : -d\psi = -\psi : -\varphi$$

oder

$$\varphi d\varphi + \psi d\psi = 0;$$

das Integral dieser Gleichung lautet:

$$H_2 = \varphi\varphi + \psi\psi = \text{Konst.}$$

Im vorliegenden Falle steigt die Differentialgleichung, deren Integral zur Bestimmung von H_2 gefunden werden muß, nur zur ersten Ordnung auf, und es gibt nur ein neues Integral ψ=Konst. der vorgelegten Differentialgleichungen, das sich aus dem gegebenen φ = Konst. ableiten läßt. Da jene Gleichung erster Ordnung ohne weiteres integriert ist, so haben wir, wenn die drei Integrale des Prinzips der Flächen gelten, zwei Funktionen H_1 und H_2, die identisch den Gleichungen genügen:

$$[f, H_1] = 0, \quad [f, H_2] = 0, \quad [H_1, H_2] = 0.$$

An Stelle von H_2 darf man auch eine beliebige andere Funktion von f, H_1, H_2 setzen, z. B. die Funktion

$$H_2 = \sqrt{H_1 H_1 + \varphi\varphi + \psi\psi},$$

die meistens bequemere Formeln liefert. Hat man irgend ein Integral H_i = Konst. in der Reihe der nach unserer Methode zu ermittelnden Integrale gefunden, so vermindert sich, wie wir oben in § 22 gesehen haben, die Ordnung des Systems von Differentialgleichungen, das noch zu integrieren ist, um zwei Einheiten. Führen wir also an Stelle der beiden Integrale φ = Konst., ψ = Konst. das eine H_2 = Konst. ein, so kann es scheinen, daß wir nichts gewonnen haben, da auch durch zwei beliebige gefundene Integrale die Ordnung der vorgelegten Differentialgleichungen um zwei Einheiten vermindert wird. Es besteht aber der Unterschied, daß wir nach Einführung des einen Integrals H_2 = Konst. unsere Integrationsmethode anwenden können, nach der durch jedes neu gefundene Integral H_i = Konst. die Ordnung der Differentiationen um zwei Einheiten vermindert wird. Noch besser aber wird die Natur der angegebenen Methode durch folgende Betrachtungen klar.

Ich habe oben in § 56 in besonderer Weise gezeigt, was auch aus unserer allgemeinen Theorie hätte entnommen werden können, daß, so oft das eine Integral

$$H_1 = \sum m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) = \sum m_i r_i^2 \frac{dv_i}{dt}$$

gilt, mit Hilfe dieses Integrals eine Veränderliche v_n zusammen mit ihrer Ableitung $\frac{dv_n}{dt}$ aus den vorgelegten Differentialglei-

chungen ganz herausgeht, wodurch die Ordnung der Differentiationen um zwei Einheiten vermindert wird. Setzt man nämlich $v_i = u_i + v_n$ und eliminiert mit Hilfe der obigen Gleichung $\frac{dv_n}{dt}$, so bleiben in den vorgelegten Differentialgleichungen von den Veränderlichen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ und ihren Ableitungen nur die Differenzen u_i, $\frac{du_i}{dt}$ zurück. Um nun aber den Vorteil, den wir auf diese Weise gewinnen, nicht wieder zu verlieren, müssen wir zur weiteren Reduktion der Ordnung der Differentiationen nur die Integrale anwenden, die auch nur die Differenzen der Veränderlichen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ enthalten. Das trifft bei den beiden übrigen Integralen, die sich auf das Prinzip der Flächen beziehen, also bei

$$\varphi = \text{Konst.}, \quad \psi = \text{Konst.},$$

wobei

$$\varphi = \sum m_i\left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt}\right)$$

$$= \sum m_i\left\{ \quad \sin v_i\left(r_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dr_i}{dt}\right) - z_i r_i \cos v_i \frac{dv_i}{dt}\right\},$$

$$\psi = \sum m_i\left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt}\right)$$

$$= \sum m_i\left\{- \cos v_i\left(r_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dr_i}{dt}\right) - z_i r_i \sin v_i \frac{dv_i}{dt}\right\}$$

ist, nicht zu. Aus diesem Grunde muß man statt dieser beiden Integrale eine gewisse Kombination von ihnen benutzen, in der nur die Differenzen der Winkel $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vorkommen. Eine solche Kombination ist die Gleichung

$$\varphi\varphi + \psi\psi = \text{Konst.}$$

Man hat nämlich, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet,

$$\psi + \varphi\sqrt{-1}$$

$$= \sum m_i e^{-v_i\sqrt{-1}}\left(z_i \frac{dr_i}{dt} - r_i \frac{dz_i}{dt} - z_i r_i \frac{dv_i}{dt}\sqrt{-1}\right),$$

$$\psi - \varphi\sqrt{-1}$$

$$= \sum m_k e^{+v_k\sqrt{-1}}\left(z_k \frac{dr_k}{dt} - r_k \frac{dz_k}{dt} + z_k r_k \frac{dv_k}{dt}\sqrt{-1}\right).$$

Setzt man

$$\varkappa_i = \varrho_i \cos\eta_i\,, \quad r_i = \varrho_i \sin\eta_i\,,$$

so erhält man

$$\psi + \varphi\sqrt{-1} = \sum m_i e^{-v_i\sqrt{-1}}\varrho_i^2\left(\frac{d\eta_i}{dt} - \cos\eta_i\sin\eta_i\frac{dv_i}{dt}\sqrt{-1}\right),$$

$$\psi - \varphi\sqrt{-1} = \sum m_k e^{+v_k\sqrt{-1}}\varrho_k^2\left(\frac{d\eta_k}{dt} + \cos\eta_k\sin\eta_k\frac{dv_k}{dt}\sqrt{-1}\right),$$

mithin

$$\psi\psi + \varphi\varphi = \sum m_i m_k e^{-(v_i - v_k)\sqrt{-1}}\varrho_i^2\varrho_k^2$$

$$\left(\frac{d\eta_i}{dt} - \cos\eta_i\sin\eta_i\frac{dv_i}{dt}\sqrt{-1}\right)\left(\frac{d\eta_k}{dt} + \cos\eta_k\sin\eta_k\frac{dv_k}{dt}\sqrt{-1}\right).$$

In dieser Doppelsumme sind i und k die Werte $1, 2, \ldots, n$ beizulegen, wenn n wieder die Anzahl der materiellen Punkte ist, deren Bewegung bestimmt werden soll. Die Summe enthält offenbar nur die Differenzen der $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Daß sie auch von den $\frac{dv_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt}, \ldots, \frac{dv_n}{dt}$ nur die Differenzen enthält, wird leicht bewirkt mit Hilfe der Gleichung

$$H_1 = \sum m_i r_i^2\frac{dv_i}{dt} = \sum m_i\varrho_i^2\sin^2\eta_i\frac{dv_i}{dt} = \text{Konst.}$$

Nach Beseitigung des Imaginären geht die obige Gleichung in folgende über:

$$\psi\psi + \varphi\varphi$$

$$= \sum m_i m_k\cos(v_i - v_k)\varrho_i^2\varrho_k^2\left(\frac{d\eta_i}{dt}\frac{d\eta_k}{dt} + \tfrac{1}{4}\sin 2\eta_i\sin 2\eta_k\frac{dv_i}{dt}\frac{dv_k}{dt}\right)$$

$$+ \sum m_i m_k\sin(v_i - v_k)\varrho_i^2\varrho_k^2\left(\tfrac{1}{2}\sin 2\eta_k\frac{d\eta_i}{dt}\frac{dv_k}{dt} - \tfrac{1}{2}\sin 2\eta_i\frac{d\eta_k}{dt}\frac{dv_i}{dt}\right),$$

eine Formel, die wir bei dieser Gelegenheit notieren wollen.

Da es nach dem Obigen im vorliegenden Falle klar ist, daß man bei der Integration der vorgelegten Differentialgleichungen statt der beiden Integrale $\varphi = \text{Konst.}$, $\psi = \text{Konst.}$ das eine $\varphi\varphi + \psi\psi = \text{Konst.}$ anwenden muß, so fragt es sich, welchen Nutzen das Integral $\varphi = \text{Konst.}$ oder $\psi = \text{Konst.}$ bietet, das man neben diesem Integral $\varphi\varphi + \psi\psi = \text{Konst.}$ noch hat. Der Nutzen ist der, daß man dank dem Integral einer Quadratur überhoben wird. Es seien nämlich $H_1 = a_1$, $\varphi = \sqrt{a_2}\cos\beta$, $\psi = \sqrt{a_2}\sin\beta$ die drei Integrale, die das Prinzip

der Erhaltung der Flächen ausmachen, wobei a_1, a_2, β willkürliche Konstanten bezeichnen. Hat man alle Integralgleichungen zwischen den Größen r_i, u_i, z_i, $\frac{dr_i}{dt}$, $\frac{du_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$ gefunden, so findet man $\frac{dv_n}{dt}$ mit Hilfe der Gleichung

$$H_1 = \sum m_i r_i^2 \frac{dv_i}{dt} = \alpha$$

durch die oben in § 56 (1) angegebene Formel:

$$\frac{dv_n}{dt} = \frac{\alpha - \sum m_i r_i^2 \frac{du_i}{dt}}{\sum m_i r_i^2}.$$

Aus dieser Formel hätte man den Wert von v_n durch eine Quadratur zu ermitteln, die einem jedoch durch die Gleichung $\varphi = \sqrt{a_2} \cos \beta$ oder $\psi = \sqrt{a_2} \sin \beta$ oder eine andere aus ihnen zusammengesetzte erspart wird. Es wird nämlich, wenn man die oben angegebenen Ausdrücke für φ, ψ benutzt,

$$\begin{aligned}\varphi \cos v_n + \psi \sin v_n &= \sqrt{a_2} \cos(v_n - \beta) \\ &= \sum m_i \left\{ \sin u_i \left(r_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dr_i}{dt} \right) - z_i r_i \cos u_i \frac{dv_i}{dt} \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi \sin v_n - \psi \cos v_n &= \sqrt{a_2} \sin(v_n - \beta) \\ &= \sum m_i \left\{ \cos u_i \left(r_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dr_i}{dt} \right) + z_i r_i \sin u_i \frac{dv_i}{dt} \right\}.\end{aligned}$$

Durch jede dieser Gleichungen bestimmt sich nach Einsetzung der Werte $\frac{dv_i}{dt} = \frac{du_i}{dt} + \frac{dv_n}{dt}$, die wir jetzt als gegeben betrachten, v_n ohne Quadratur.

Es wird bewiesen, daß jedes mechanische Problem, für das die Prinzipe der Erhaltung der lebendigen Kräfte und der Flächen gelten, und bei dem die Lage des Systems nur von drei Konstanten abhängt, auf Quadraturen hinauskommt.

§ 65. Nach den obigen Betrachtungen kann man abschätzen, was wir durch die angegebene Methode gewinnen, wenn bei einem mechanischen Problem außer dem Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte die drei Integrale gelten, die

das Prinzip der Erhaltung der Flächen betreffen. Die Ordnung des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen

$$dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_m : \quad dp_1 : \quad dp_2 : \cdots : \quad dp_m$$
$$= \frac{\partial f}{\partial p_1} : \frac{\partial f}{\partial p_2} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial p_m} : -\frac{\partial f}{\partial q_1} : -\frac{\partial f}{\partial q_2} : \cdots : -\frac{\partial f}{\partial q_m}$$

ist $2m - 1$. Sie wird durch das Integral $f = a$ auf die Ordnung $2m - 2$ zurückgeführt und durch die drei Integrale des Prinzips der Flächen $H_1 = a_1$, $\varphi = \sqrt{a_2} \cos\beta$, $\psi = \sqrt{a_2} \sin\beta$ auf die Ordnung $2m - 5$. Denn wenn auch schon durch die beiden Integrale $f = a$, $H_1 = a_1$ die vorgelegten Gleichungen auf die Ordnung $2m - 4$ zurückgeführt werden, indem man $v_i = u_i + v_n$ setzt und $\frac{dv_n}{dt}$ eliminiert, wobei v_n von selbst aus den Differentialgleichungen fortgeht, so kann man doch, wie ich bemerkt habe, um das Wiederauftreten von v_n in den Differentialgleichungen zu vermeiden, statt der Integrale $\varphi = \sqrt{a_2} \cos\beta$, $\psi = \sqrt{a_2} \sin\beta$ nur das eine Integral $\varphi\varphi + \psi\psi = a_2$ benutzen, und es wird daher die Ordnung $2m - 4$ nur noch um eine Einheit vermindert werden. Unsere Methode aber, nach der jedes den gegebenen Bedingungen genügende Integral die Ordnung der Differentiationen um zwei Einheiten vermindert, bewirkt, daß durch Anwendung der beiden Integrale $H_1 = a_1$, $H_2 = a_2$, für welche man identisch hat

$$[H_1, f] = 0, \quad [H_2, f] = 0, \quad [H_1, H_2] = 0,$$

die Ordnung $2m - 2$ auf die Ordnung $2m - 6$ zurückgeführt wird. Es fließt also in dem Spezialfall $m = 3$ aus der angegebenen Methode der bemerkenswerte Satz:

Jedes mechanische Problem, für das die Prinzipe der Erhaltung der lebendigen Kräfte und der Flächen gelten, und bei dem die geometrische Lage des Systems durch drei Größen bestimmt wird, läßt sich auf Quadraturen zurückführen.

Der vorstehende Satz verliert etwas von seiner Wichtigkeit durch den Umstand, daß es, wenn ich mich nicht sehr irre, kein mechanisches Problem gibt, für das die genannten allgemeinen Prinzipe gelten, und bei dem die Lage des Systems von drei Größen abhängt, außer jenen zwei Problemen der Bewegung eines von einem festen Zentrum angezogenen Punktes und der Rotation eines kräftefreien starren Körpers um einen

festen Punkt. Die vollständige Lösung dieser Probleme ist aber seit geraumer Zeit unter den Analysten eine ausgemachte Sache. Man pflegt allerdings die Zurückführung des zweiten Problems auf Quadraturen als den schönsten Ruhmestitel zu preisen, den die Analysten des achtzehnten Jahrhunderts erlangt haben, die sich jedoch auf die Integration der Differentialgleichungen sehr gut verstanden. Und später verdiente *Lagrange* hohes Lob und gerechte Bewunderung, der die Zurückführung des Problems auf Quadraturen anzugreifen wagte, ohne die Eigenschaften der Hauptachsen der Körper zu Hilfe zu nehmen, auf die sich *Euler*s Analyse stützte; das hielt man für eine glänzende und fast überschwenglich geniale Leistung. Deshalb wird es vielleicht den Analysten nicht mißfallen, daß hier nicht nur ohne Hilfe der Eigenschaften der Hauptachsen, sondern sogar ohne bestimmte Wahl der Veränderlichen, ja sogar ohne Bildung der dem Problem eigentümlichen Differentialgleichungen die Zurückführung auf Quadraturen bewirkt wird, wobei nur der Umstand benutzt wird, daß bei dem angegebenen Problem allgemeine mechanische Prinzipe gelten. [34])

Es erscheint der Mühe wert, die gleichzeitige Zurückführung der beiden in Rede stehenden mechanischen Probleme auf Quadraturen, die nach der mitgeteilten allgemeinen Methode zu bewirken ist, genauer auseinanderzusetzen. Wenn die betrachteten Bewegungen gestört werden, so liefert dieselbe Analyse ohne weitere Rechnung die Ableitungen der gestörten Elemente (§ 52).

Gleichzeitige Lösung des Problems der Bewegung eines von einem festen Zentrum angezogenen Punktes und der Rotation eines kräftefreien starren Körpers um einen festen Punkt, zugleich mit den Differentialausdrücken der gestörten Elemente beider Probleme.

§ 66. Es werde irgend eine Art gewählt, bei dem einen Problem die Lage des Punktes im Raume, bei dem andern die Lage des starren Körpers um den festen Punkt zu bestimmen. Das geschieht in beiden Fällen durch drei Größen, die ich q_1, q_2, q_3 nenne. Es sei $\frac{dq_1}{dt} = q_1'$, $\frac{dq_2}{dt} = q_2'$, $\frac{dq_3}{dt} = q_3'$, und nachdem man die Summe der lebendigen Kräfte T durch $q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3'$ ausgedrückt hat, sei

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2'} = p_2, \quad \frac{\partial T}{\partial q_3'} = p_3.$$

Nehmen wir an, $H = a$ sei die Gleichung des Prinzips von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, und $H_1 = a_1$, $\varphi = a'_1$, $\psi = a''_1$ seien die drei Gleichungen, die das Prinzip der Erhaltung der Flächen in bezug auf drei zueinander senkrechte Ebenen darstellen. Diese Ebenen gehen bei dem einen Problem durch das Anziehungszentrum hindurch, bei dem andern durch den festen Punkt des Körpers.

Die Größen a, a_1, a'_1, a''_1 sind willkürliche Konstanten, die in die Funktionen H, H_1, φ, ψ nicht eingehen. Nachdem H, H_1, $H_2 = \sqrt{H_1 H_1 + \varphi\varphi + \psi\psi}$ durch die Größen q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3 ausgedrückt und aus den Gleichungen

$$H = a\,, \quad H_1 = a_1\,, \quad H_2 = a_2\,,$$

in denen $a_2 = \sqrt{a_1 a_1 + a'_1 a'_1 + a''_1 a''_1}$ ist, die Größen p_1, p_2, p_3 durch q_1, q_2, q_3 bestimmt sind, ist $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3$ ein vollständiges Differential, und wenn man

$$\int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3) = V$$

setzt und mit a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 willkürliche Konstanten bezeichnet, so werden nach §§ 33, 34 die Gleichungen

$$H = a\,, \quad H_1 = a_1\,, \quad H_2 = a_2\,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2 + \frac{\partial p_3}{\partial a} dq_3 \right) = t + b\,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = \int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_1} dq_2 + \frac{\partial p_3}{\partial a_1} dq_3 \right) = b_1\,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_2} = \int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a_2} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_2} dq_2 + \frac{\partial p_3}{\partial a_2} dq_3 \right) = b_2$$

die vollständigen Integrale jedes der beiden Probleme, und die drei letzten Gleichungen werden die endlichen Gleichungen der Probleme sein.

Wenn die betrachteten Bewegungen gestört werden, und bei den gestörten Problemen die das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte betreffende Gleichung

$$H + \Omega = \text{Konst.}$$

wird, so sind nach § 52 die Ableitungen der gestörten Elemente durch die Formeln gegeben

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b}, \quad \frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b_2},$$
$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a}, \quad \frac{db_1}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_2}.$$

Schon *Poisson* hat seinerzeit in einer berühmten in den Abhandlungen der Pariser Akademie vom Jahre 1816 erschienenen Abhandlung bewiesen, daß die Differentialausdrücke der gestörten Elemente für beide Probleme durch eine gemeinsame Analyse ermittelt werden können. Die beiden ungestörten Probleme habe ich aber, wie ich glaube, hier zum ersten Male unter einer gemeinsamen Analyse zusammengefaßt.[35])

Nun will ich unter bestimmter Wahl der Veränderlichen die gefundenen Formeln für das eine Problem besonders entwickeln.

Über die Bewegung eines von einem festen Zentrum nach dem Newtonschen Gesetze angezogenen Punktes; die Differentialformeln der gestörten Elemente.

§ 67. Es seien

$$\varrho \cos \eta, \quad \varrho \sin \eta \cos v, \quad \varrho \sin \eta \sin v$$

die rechtwinkligen Koordinaten des angezogenen Punktes, das feste Zentrum als Koordinatenanfang betrachtet. Setzt man $\frac{d\varrho}{dt} = \varrho'$, $\frac{dv}{dt} = v'$, $\frac{d\eta}{dt} = \eta'$ und die Masse des Körpers gleich **1**, so wird, wenn $\varkappa^2$ die Anziehungskraft für die Einheit der Entfernung bezeichnet,

$$(1) \begin{cases} H = \frac{1}{2}(\varrho'\varrho' + \varrho^2 \eta'\eta' + \varrho^2 \sin^2\eta \cdot v'v') - \frac{\varkappa^2}{\varrho} = a, \\ H_1 = \varrho^2 \sin^2\eta \cdot v' = a_1, \\ H_2 = (H_1 H_1 + \varphi\varphi + \psi\psi)^{\frac{1}{2}} = \varrho^2(\eta'\eta' + \sin^2\eta \cdot v'v')^{\frac{1}{2}} = a_2. \end{cases}$$

Dies sind bekannte Formeln, die sich leicht beweisen lassen. Die Größen ϱ, η, v sind hier dieselben, die ich im vorigen Paragraphen mit q_1, q_2, q_3 bezeichnet habe. Es wird ferner

$$T = \frac{1}{2}(\varrho'\varrho' + \varrho^2\eta'\eta' + \varrho^2 \sin^2\eta \cdot v'v'),$$

mithin

$$\frac{\partial T}{\partial \varrho'} = \varrho', \quad \frac{\partial T}{\partial \eta'} = \eta_1 = \varrho^2\eta', \quad \frac{\partial T}{\partial v'} = v_1 = \varrho^2 \sin^2\eta \cdot v'.$$

Die Größen ϱ', η_1, v_1 sind hier dieselben wie die im vorigen Paragraphen mit p_1, p_2, p_3 bezeichneten.

Eliminiert man v', so wird nach (1):

$$a + \frac{\varkappa^2}{\varrho} = \tfrac{1}{2}\left(\varrho'\varrho' + \varrho^2\eta'\eta' + \frac{a_1 a_1}{\varrho^2 \sin^2\eta}\right),$$

$$a_2^2 = \varrho^4\eta'\eta' + \frac{a_1 a_1}{\sin^2\eta},$$

woraus folgt

$$(2)\qquad \begin{cases} \varrho' = \left\{2\left(a + \dfrac{\varkappa^2}{\varrho}\right) - \dfrac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \eta_1 = \varrho^2\eta' = \left(a_2^2 - \dfrac{a_1 a_1}{\sin^2\eta}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ v_1 = \varrho^2 \sin^2\eta \cdot v' = a_1 . \end{cases}$$

Setzt man diese Werte ein, so wird

$$(3)\qquad \begin{cases} V = \displaystyle\int (\varrho' d\varrho + \eta_1 d\eta + v_1 dv) \\ \quad = \displaystyle\int \left\{2\left(a + \frac{\varkappa^2}{\varrho}\right) - \frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}} d\varrho + \int \left\{a_2^2 - \frac{a_1^2}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}} d\eta + a_1 v . \end{cases}$$

Hier ist nicht nur klar, daß, wie wir allgemein bewiesen haben, der Ausdruck

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots$$

ein vollständiges Differential ist, sondern wir sehen, daß durch die von uns getroffene Auswahl der Veränderlichen sogar die Trennung der Veränderlichen in jenem Differentialausdruck erreicht ist. Dasselbe tritt für ein beliebiges Anziehungsgesetz ein, das sich durch die Funktion $-\frac{\partial f(\varrho)}{\partial \varrho}$ ausdrückt. Es ist nur nötig, in dem obigen Ausdruck von V an Stelle von $\frac{\varkappa^2}{\varrho}$ zu setzen $f(\varrho)$.

Aus der Gleichung (3) fließen nach den im vorigen Paragraphen gegebenen Vorschriften die endlichen Integrale des Problems:

$$(4)\qquad t + b = \frac{\partial V}{\partial a} = \int \frac{d\varrho}{\left\{2\left(a + \dfrac{\varkappa^2}{\varrho}\right) - \dfrac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$(5)\quad b_1 = \frac{\partial V}{\partial a_1} = -a_1 \int \frac{d\eta}{\left\{a_2^2 - \frac{a_1^2}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}} \sin^2\eta} + v,$$

$$(6)\quad b_2 = \frac{\partial V}{\partial a_2} = a_2 \int \frac{d\eta}{\left\{a_2^2 - \frac{a_1^2}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}}} - a_2 \int \frac{1}{\left\{2\left(a + \frac{\varkappa^2}{\varrho}\right) - \frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho^2}.$$

Es wird zunächst

$$(7)\quad \int \frac{d\eta}{\left\{a_2^2 - \frac{a_1^2}{\sin^2\eta}\right\}^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{\sin\eta\, d\eta}{\{a_2^2 - a_1^2 - a_2^2\cos^2\eta\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{a_2} \arccos\left(\sqrt{\frac{a_2^2}{a_2^2 - a_1^2}} \cdot \cos\eta\right);$$

ferner erhält man aus (5)

$$(8)\quad v - b_1 = -\int \frac{a_1\, d\cot\eta}{\{a_2^2 - a_1^2 - a_1^2\cot^2\eta\}^{\frac{1}{2}}} = \arccos\left(\sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2 - a_1^2}} \cdot \cot\eta\right),$$

woraus folgt:

$$(9)\quad \cot\eta = \sqrt{\frac{a_2^2 - a_1^2}{a_1^2}} \cdot \cos(v - b_1).$$

Weiter wird sein:

$$(10)\quad \int \frac{a_2}{\left\{2\left(a + \frac{\varkappa^2}{\varrho}\right) - \frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho^2} = \int \frac{a_2^2}{\left\{\varkappa^4 + 2aa_2^2 - \left(\varkappa^2 - \frac{a_2^2}{\varrho}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho^2} = u,$$

falls man setzt

$$(11)\quad \frac{a_2^2}{\varrho} - \varkappa^2 = \sqrt{\varkappa^4 + 2aa_2^2} \cdot \cos u.$$

Setzt man (7) und (10) ein, so geht die Gleichung (6) in folgende über:

$$(12)\quad b_2 = \arccos\left(\sqrt{\frac{a_2^2}{a_2^2 - a_1^2}} \cdot \cos\eta\right) - u,$$

woraus folgt:

$$(13)\quad \cos\eta = \sqrt{\frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2^2}} \cdot \cos(u + b_2).$$

Endlich erhält man aus (4):

$$t+b=\int\frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{2a\varrho^2+2\varkappa^2\varrho-a_2^2}}=\int\frac{\sqrt{-2a}\cdot\varrho\, d\varrho}{\{\varkappa^4+2aa_2^2-(2a\varrho+\varkappa^2)^2\}^{\frac{1}{2}}};$$

wenn man also

$$(14)\qquad \varkappa^2+2a\varrho=\sqrt{\varkappa^4+2aa_2^2}\cdot\cos E$$

setzt, so wird

$$(15)\quad t+b=\frac{1}{\sqrt{-2a}}\int\varrho\, dE=\frac{\varkappa^2 E}{(-2a)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\sqrt{\varkappa^4+2aa_2^2}}{(-2a)^{\frac{3}{2}}}\cdot\sin E.$$

Damit die gefundenen Gleichungen eine einfachere Form annehmen, will ich für die benutzten willkürlichen Konstanten andere einführen. Es sei

$$(16)\quad \sqrt{1+\frac{2aa_2^2}{\varkappa^4}}=e,\quad a=-\frac{\varkappa^2}{2A},\quad \mu=\frac{(-2a)^{\frac{3}{2}}}{\varkappa^2}=\frac{\varkappa}{A^{\frac{3}{2}}};$$

dann werden die Formeln (14), (11), (15):

$$(17)\quad \varrho=A(1-e\cos E),\quad \frac{A(1-ee)}{\varrho}=1+e\cos u,$$
$$\mu(t+b)=E-e\sin E.$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß die Größen E, u, $\mu(t+b)$, A, e, $-b$, $\frac{a_2}{\varkappa}$ die exzentrische Anomalie, die wahre Anomalie, die mittlere Anomalie, die halbe große Achse, die Exzentrizität, die Perihelzeit, die Quadratwurzel des halben Parameters sind.

Setzen wir ferner

$$(18)\quad \sqrt{\frac{a_2^2-a_1^2}{a_1^2}}=\operatorname{tang} i,\quad \text{woraus folgt}\ \frac{a_1}{a_2}=\cos i,$$

so wird nach (9):

$$(19)\qquad \cos i\cos\eta=\sin i\sin\eta\cos(v-b_1).$$

Diese Gleichung lehrt, daß die Bahn des angezogenen Punktes eben ist, und i die Neigung der Bahn und b_1 die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn bezeichnet; mithin wird $\frac{a_1}{\varkappa}$ gleich der Quadratwurzel des halben Parameters multipliziert mit dem Kosinus der Neigung der Bahn sein. Hiermit haben schon die fünf willkürlichen

Konstanten a, a_1, a_2, b, b_1 eine geometrische Bedeutung gewonnen. Es bleibt noch die Gleichung (13) übrig, die nach (18) in folgende übergeht:

$$(20)\quad \cos\eta = \sin i \cos(u + b_2) = \sin i \cdot \sin\left(u + \frac{\pi}{2} + b_2\right).$$

Diese Formel lehrt, daß $\frac{\pi}{2} + b_2$ der Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten ist.

Nach dem in § 66 angegebenen Theorem werden die Ableitungen der gestörten Elemente:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b}, \quad \frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_2},$$
$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a}, \quad \frac{db_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_2}.$$

In diesen Formeln ist:

$-\frac{\varkappa^2}{2a}$ ⋯ die halbe große Achse,

$\frac{a_1}{\varkappa}$ ⋯ die Quadratwurzel des halben Parameters multipliziert mit dem Kosinus der Neigung,

$\frac{a_2}{\varkappa}$ ⋯ die Quadratwurzel des halben Parameters,

$-b$ ⋯ die Perihelzeit,

b_1 ⋯ die Länge des aufsteigenden Knotens,

$\frac{\pi}{2} + b_2$ ⋯ der Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten.

Bedeutet daher, um die üblichere Bezeichnung anzuwenden, A die halbe große Achse, h die Quadratwurzel des halben Parameters, i die Neigung, τ die Perihelzeit, ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens, ϖ seinen Abstand vom Perihel, so werden die Differentialformeln der gestörten Elemente:

$$(21)\quad \begin{cases} \varkappa^2 \dfrac{dA}{dt} = 2A^2 \dfrac{\partial\Omega}{\partial\tau}, & \varkappa^2 \dfrac{d\tau}{dt} = -2A^2 \dfrac{\partial\Omega}{\partial A}, \\ \varkappa \dfrac{d\varpi}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial h}, & \varkappa \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varpi}, \\ \varkappa \dfrac{d☊}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial(h\cos i)}, & \varkappa \dfrac{d(h\cos i)}{dt} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial ☊}. \end{cases}$$

Diese Formeln sind äquivalent mit den folgenden Differentialgleichungen, in welchen $\varrho = \sqrt{xx + yy + zz}$ ist:

$$\text{(22)} \quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} = -\dfrac{\varkappa^2 x}{\varrho^3} - \dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} = -\dfrac{\varkappa^2 y}{\varrho^3} - \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \dfrac{d^2 z}{dt^2} = -\dfrac{\varkappa^2 z}{\varrho^3} - \dfrac{\partial \Omega}{\partial z}; \end{cases}$$

dabei ist Ω eine gegebene Funktion von x, y, z, t. Oder sie sind äquivalent mit folgenden allgemeineren Differentialgleichungen:

$$\text{(23)} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x' + \dfrac{\partial \Omega}{\partial x'}, & \dfrac{dx'}{dt} = -\dfrac{\varkappa^2 x}{\varrho^3} - \dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \dfrac{dy}{dt} = y' + \dfrac{\partial \Omega}{\partial y'}, & \dfrac{dy'}{dt} = -\dfrac{\varkappa^2 y}{\varrho^3} - \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \dfrac{dz}{dt} = z' + \dfrac{\partial \Omega}{\partial z'}, & \dfrac{dz'}{dt} = -\dfrac{\varkappa^2 z}{\varrho^3} - \dfrac{\partial \Omega}{\partial z}; \end{cases}$$

dabei ist Ω eine gegebene Funktion von t, x, y, z, x', y', z'. Nach den verschiedenen oben mitgeteilten Methoden werden aus dem vorliegenden System kanonischer Elemente unzählige andere mit Leichtigkeit abgeleitet.

Will man, was bei den Rechnungen bequemer ist, statt der Perihelzeit als Element die Epoche oder den Wert der mittleren Anomalie für $t = 0$ einführen,

$$c = -\mu\tau = \mu b,$$

so leitet man aus (21) leicht ab:

$$\varkappa \frac{dc}{dt} = 2A^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Omega}{\partial A}, \quad \varkappa \frac{dA}{dt} = -2A^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Omega}{\partial c},$$

während die übrigen Formeln (21) ungeändert bleiben.

Wir wollen noch den endlichen Ausdruck der Funktion V suchen. Es wird

$$\left\{2\left(a + \frac{\varkappa^2}{\varrho}\right) - \frac{a_2^2}{\varrho^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\varkappa e}{\sqrt{A}} \frac{\sin E}{1 - e\cos E},$$

$$d\varrho = Ae\sin E dE,$$

woraus folgt

$$\int \left\{ 2\left(a + \frac{\varkappa^2}{\varrho}\right) - \frac{a_2^2}{\varrho^2} \right\}^{\frac{1}{2}} d\varrho = \varkappa e^2 \sqrt{A} \int \frac{\sin^2 E dE}{1 - e\cos E}$$

$$= \varkappa \sqrt{A} \left\{ E + e\sin E - 2\sqrt{1-e^2} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\frac{E}{2} \right) \right\}.$$

Es wird ferner, wenn man $a_2 = \varkappa h = \varkappa\sqrt{A(1-e^2)}$ setzt,

$$\int \left\{ a_2^2 - \frac{a_1^2}{\sin^2\eta} \right\}^{\frac{1}{2}} d\eta = \varkappa h \int \left\{ 1 - \frac{\cos^2 i}{\sin^2\eta} \right\}^{\frac{1}{2}} d\eta$$

$$= \varkappa h \arccos\left(\frac{\cos\eta}{\sin i} \right) - \varkappa h \cos i \arccos(\cot i \cot\eta).$$

Mithin ist

$$V = \varkappa \sqrt{A} \left\{ E + e\sin E - 2\sqrt{1-e^2} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\frac{E}{2} \right) \right\}$$

$$+ \varkappa h \arccos\left(\frac{\cos\eta}{\sin i} \right) + \varkappa h \cos i \{ v - \arccos(\cot i \cot\eta) \}.$$

Bei der Differentiation dieses Ausdrucks nach den willkürlichen Konstanten A, e, i, die an Stelle von a, a_1, a_2 eingeführt werden können, sind die Gleichungen anzuwenden:

$$0 = 1 - e\cos E + Ae\sin E \frac{\partial E}{\partial A},$$

$$0 = \cos E - e\sin E \frac{\partial E}{\partial e},$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial i}.$$

Die obigen Integrationen sind von der Grenze $\varrho = A(1-e)$ bzw. $\eta = \frac{\pi}{2} - i$ an ausgeführt. Auf diese Grenzen haben wir bei der Differentiation von V nach den willkürlichen Konstanten keine Rücksicht genommen. Da nämlich in dem Ausdruck V die Glieder unter dem Integralzeichen für jene Grenzen verschwinden, so ergibt sich leicht, daß die aus der Variation der Grenzen hervorgehenden Glieder verschwinden und daher vernachlässigt werden dürfen.

Über die Anwendung der auseinandergesetzten Methode auf verschiedene Probleme, insbesondere auf isoperimetrische Probleme.

§ 68. Die allgemeine Methode läßt sich auch leicht anwenden auf das berühmte Problem eines Punktes, der von zwei festen Punkten mit gegebenen Massen nach dem *Newton*schen Gesetz angezogen wird. Mit seiner Lösung beschäftigt, hatte *Euler* außer den beiden von den Prinzipen der Erhaltung der lebendigen Kräfte und der Flächen gelieferten Integralen noch ein drittes Integral gefunden, wodurch das Problem auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zwischen zwei Veränderlichen zurückgeführt wurde. Es bedurfte aber des großen Scharfsinnes und des unerschrockenen Mutes dieses hervorragenden Mannes, um nach den verschiedensten Versuchen die Zurückführung dieser äußerst komplizierten Differentialgleichung auf Quadraturen gelingen zu lassen. Durch unsere Methode hätte nach der allgemeinen Regel, ohne eine Rechnung anzustellen, die Differentialgleichung auf Quadraturen zurückgeführt werden können. Hat man nämlich aus jenen drei Integralen x', y', z' durch x, y, z und die drei willkürlichen Konstanten a, a_1, a_2 ausgedrückt, die in den Prinzipen der lebendigen Kräfte und der Flächen und in dem von *Euler* gefundenen Integral stecken, so sind die drei Gleichungen

$$\int\left(\frac{\partial x'}{\partial a}dx+\frac{\partial y'}{\partial a}dy+\frac{\partial z'}{\partial a}dz\right)=t+b,$$
$$\int\left(\frac{\partial x'}{\partial a_1}dx+\frac{\partial y'}{\partial a_1}dy+\frac{\partial z'}{\partial a_1}dz\right)=b_1,$$
$$\int\left(\frac{\partial x'}{\partial a_2}dx+\frac{\partial y'}{\partial a_2}dy+\frac{\partial z'}{\partial a_2}dz\right)=b_2,$$

in denen die Ausdrücke unter den Integralzeichen vollständige Differentiale sind, die endlichen Gleichungen des vorgelegten Problems. Ebenso erhält man auch für dieses Problem aus unsern allgemeinen Sätzen ohne jede Rechnung die Störungsformeln.

So oft bei einem mechanischen Problem, für das das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte gilt, die Lage des Systems durch zwei voneinander unabhängige Größen q_1, q_2 bestimmt wird — was z. B. der Fall ist, wenn ein Punkt sich auf einer gegebenen Fläche in kürzester Linie bewegt —, hätte man die neue Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen

erster Ordnung nicht nötig, sondern es genügt die *Lagrange*sche Methode, die für drei Veränderliche als abgeschlossen betrachtet werden darf.[36]) Probleme dieser Art hängen von der Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen zwei Veränderlichen ab. Diese reduziert sich, wenn außer dem genannten Prinzip noch ein anderes Integral

$$f_1(q_1, q_2, p_1, p_2) = a_1$$

bekannt wird, auf die erste Ordnung. Aber nach unserer allgemeinen Methode oder auch nach der *Lagrange*schen Methode partielle Differentialgleichungen erster Ordnung in drei Veränderlichen zu integrieren, läßt sich diese Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen immer auf Quadraturen zurückführen. Es sei nämlich $f = a$ die Gleichung der lebendigen Kräfte, und man ermittele aus den Gleichungen $f = a$, $f_1 = a_1$ die Werte von p_1, p_2. Dann wird die Gleichung

$$\int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_1} dq_2 \right) = b_1 ,$$

die Lage des Systems bestimmen, d. h. für einen einzelnen auf einer gegebenen Fläche sich bewegenden Punkt seine Bahn, und die andere Gleichung

$$\int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2 \right) = b + t$$

die Zeit der Lage. Diesem Fall, der nur die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in drei Veränderlichen verlangt, in der die eine der Veränderlichen, die gesuchte Funktion, selbst nicht vorkommt, ordnen sich die oben angeführten Beispiele unter. Führt man nämlich Polarkoordinaten ein, so läßt sich durch das von dem Prinzip der Erhaltung der Flächen hergenommene Integral eine Veränderliche und die nach ihr genommene partielle Ableitung aus der partiellen Differentialgleichung eliminieren, so daß die drei unabhängigen Veränderlichen auf zwei zurückgeführt werden und die partielle Differentialgleichung, von deren Integration das Problem abhängt, auf eine andere schon bei *Lagrange* behandelte.

Bekanntlich sind die linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Veränderlichen so be-

schaffen, daß nach Auffindung eines Integrals das andere nur von einer Quadratur abhängt. Wir sehen, daß mechanische Probleme auf andere gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Veränderlichen führen, die so beschaffen sind, daß nach Auffindung eines Integrals das andere nur noch von Quadraturen abhängt, und die keineswegs linear sind.[37])

Von dieser Art ist z. B. die bekannte Differentialgleichung, die sich auf die kürzeste Linie auf einer gegebenen Fläche bezieht; denn diese Linie beschreibt ein Punkt, der gezwungen ist, sich auf der gegebenen Fläche zu bewegen, und auf den keine beschleunigenden Kräfte wirken. Mithin hat man den Satz:

Hat man für die Differentialgleichung zweiter Ordnung, von der die kürzeste Linie abhängt, ein Integral gefunden, so ist die Bestimmung der Linie auf bloße Quadraturen zurückgeführt.[38])

Beispiele für diesen Satz liefern die kürzesten Linien auf Rotationsflächen, Kegelflächen, Zylinderflächen, bei denen ein Integral sich von selbst bietet. Allgemeiner wird das Gesagte für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung gelten, von denen die Aufgabe abhängt, Integrale der Form

$$\int \varphi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) dx$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen. Aus dem oben Mitgeteilten geht aber, wenn man die hier behandelten mechanischen Probleme in der Form

$$\delta \int (T + U)\ dt = 0$$

schreibt, leicht hervor, daß sich die angegebene Methode auf alle isoperimetrischen Probleme anwenden läßt, bei denen der Ausdruck unter dem Integralzeichen eine beliebige Anzahl unbekannter Funktionen und deren erste Ableitungen enthält. Setzt man nämlich $q_i' = \frac{dq_i}{dt}$, und ist die Gleichung

$$\delta \int \varphi(t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m,\ q_1',\ q_2',\ \ldots,\ q_m')\, dt = 0$$

vorgelegt, so bilde man

$$H = q_1' \frac{\partial \varphi}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial \varphi}{\partial q_2'} + \cdots + q_m' \frac{\partial \varphi}{\partial q_m'} - \varphi$$

und eliminiere aus diesem Ausdruck $q_1', q_2', \ldots, q_m'$ mit Hilfe der Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1'} = p_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q_2'} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q_m'} = p_m.$$

Dann wird das Problem, wie man leicht nach den bekannten Regeln der Variationsrechnung beweisen und auch aus der Analyse entnehmen kann, die man bei *Hamilton* findet, von der vollständigen Integration des folgenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen abhängen: [39])

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}.$$

Diese vollständige Integration wird, wie ich bewiesen habe, erhalten durch die vollständige Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

in der man zu setzen hat

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad p_m = \frac{\partial V}{\partial q_m}.$$

Diese Integration wird aber durch die hier auseinandergesetzte neue Methode erledigt.

Auch einen allgemeineren Fall isoperimetrischer Probleme, in denen der Ausdruck unter dem Integralzeichen außer den ersten Ableitungen der unbekannten Funktionen höhere Ableitungen irgend welcher Ordnung enthält, gelingt es, auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurückzuführen. Diese partiellen Differentialgleichungen genießen alle den Vorzug, daß sie die gesuchte Funktion oder die abhängige Veränderliche selbst nicht enthalten. Es gibt aber auch isoperimetrische Probleme, die zu partiellen Differentialgleichungen führen, die auch die abhängige Veränderliche enthalten. Ich meine die Probleme, bei denen der Ausdruck, dessen Variation man zu Null machen muß, nicht unmittelbar als Integral vorliegt, sondern selbst von der Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung abhängt, die außerdem

unbekannte Funktionen und deren Ableitungen enthält. Ja sogar, wenn der Ausdruck, dessen Variation man zu Null machen soll, durch eine Differentialgleichung irgend welcher Ordnung gegeben ist, die auch unbekannte Funktionen und deren Ableitungen enthält, gelingt es, die Frage auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurückzuführen. Es können also auch bei jenen sehr allgemeinen Fragen unsere Methoden angewandt werden.

Wir haben die isoperimetrischen Fragen, die auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden können, im obigen als solche angenommen, bei denen Funktionen einer Veränderlichen oder Kurven gesucht werden, die einer Maximums- oder Minimumseigenschaft genügen. Welche Analoga hierzu es bei den isoperimetrischen Problemen gibt, wo man Funktionen von zwei Veränderlichen oder Flächen sucht, die ein gegebenes Doppelintegral zu einem Maximum oder Minimum machen, das zu ermitteln überlasse ich glücklicheren Bemühungen.

Über die einfachen Beziehungen, durch die die partiellen Ableitungen der Veränderlichen nach den kanonischen Elementen den Ableitungen der Elemente nach den Veränderlichen bezüglich gleichgesetzt werden, entweder direkt oder mit umgekehrtem Zeichen.

§ 69. Die Systeme von Elementen, die in den Lösungen der mechanischen Probleme auftreten, wie sie nach unserer Methode gefunden werden, liefern nicht nur die einfachsten Störungsformeln, sondern sie genießen noch andere wichtige Eigenschaften. Diese will ich im folgenden auseinandersetzen.

V sei eine Funktion der Größen

$$q_1, q_2, \ldots, q_m, a_1, a_2, \ldots, a_m, t_1, t_2, \ldots, t_\mu,$$

und wir wollen setzen

$$(1)\qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

$$(2)\qquad \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a_m} = b_m,$$

$$(3)\qquad \frac{\partial V}{\partial t_1} = T_1, \quad \frac{\partial V}{\partial t_2} = T_2, \ldots, \frac{\partial V}{\partial t_\mu} = T_\mu.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2) seien $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ durch $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m, t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ ausgedrückt und umgekehrt $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ durch $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m, t_1, t_2, \ldots, t_\mu$. Diese Ausdrücke sind es, die ich im folgenden meine, wenn die Größen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ nach den a_i, b_i, t_i oder umgekehrt die Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ nach den q_i, p_i, t_i differentiiert werden. Die Annahme, daß die Größen q_i, p_i so durch die a_i, b_i, t_i ausgedrückt sind, daß (1) und (2) Identitäten werden, will ich die erste Annahme nennen; die Annahme, daß die Größen a_i, b_i so durch die q_i, p_i, t_i ausgedrückt sind, daß (1) und (2) Identiäten werden, will ich die zweite Annahme nennen.

Unter Zugrundelegung der ersten Annahme wollen wir die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial a_k} = b_k$$

nach a_i, b_i, t_i differentiieren. Dann ergibt sich:

$$(4)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial a_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial a_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial a_i} = 0,$$

$$(5)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial b_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial b_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial b_i} = \frac{\partial b_k}{\partial b_i},$$

$$(6)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial t_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial t_i} = 0.$$

Unter Zugrundelegung der zweiten Annahme wollen wir die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial q_\lambda} = p_\lambda$$

nach $q_{i'}, p_{i'}, t_{i'}$ differentiieren. Dann ergibt sich:

$$(7)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial q_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial q_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial q_{i'}} = 0,$$

$$(8)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i'}},$$

$$(9)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial t_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial t_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial t_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\lambda \partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial t_{i'}} = 0.$$

In diesen Formeln kann man den Indizes i, i', k, λ die Werte $1, 2, \ldots, m$ beilegen, außer wenn i, i', bei t stehen, in welchem Falle ihnen die Werte $1, 2, \ldots, \mu$ zukommen. Die Ausdrücke $\frac{\partial b_k}{\partial b_i}$, $\frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i'}}$ sind entweder Null, wenn k, λ von i, i' verschieden sind, oder gleich 1, wenn $k = i$, $\lambda = i'$ ist.

Man multipliziere die Gleichungen (4), (5), (6) mit

$$\frac{\partial a_k}{\partial q_{i'}},\quad \frac{\partial a_k}{\partial p_{i'}},\quad \frac{\partial a_k}{\partial t_{i'}}$$

und summiere nach Ausführung der Multiplikationen nach dem Index k, d. h. man setze für k der Reihe nach $1, 2, \ldots, m$ und addiere die so entstehenden Ausdrücke. Dann erhalten wir nach (7), (8), (9) aus (4):

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_i}\dfrac{\partial a_1}{\partial q_{i'}} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_i}\dfrac{\partial a_2}{\partial q_{i'}} + \cdots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial a_i}\dfrac{\partial a_m}{\partial q_{i'}} \\ = \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_{i'}}\dfrac{\partial q_1}{\partial a_i} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_{i'}}\dfrac{\partial q_2}{\partial a_i} + \cdots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial q_{i'}}\dfrac{\partial q_m}{\partial a_i}, \end{cases}$$

$$(11)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_i}\frac{\partial a_1}{\partial p_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_i}\frac{\partial a_2}{\partial p_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial a_i}\frac{\partial a_m}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i},$$

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_i}\dfrac{\partial a_1}{\partial t_{i'}} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_i}\dfrac{\partial a_2}{\partial t_{i'}} + \cdots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial a_i}\dfrac{\partial a_m}{\partial t_{i'}} \\ = \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t_{i'}}\dfrac{\partial q_1}{\partial a_i} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial t_{i'}}\dfrac{\partial q_2}{\partial a_i} + \cdots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial t_{i'}}\dfrac{\partial q_m}{\partial a_i}; \end{cases}$$

aus (5):

$$(13)\quad -\frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_{i'}}\frac{\partial q_1}{\partial b_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_{i'}}\frac{\partial q_2}{\partial b_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial q_{i'}}\frac{\partial q_m}{\partial b_i},$$

$$(14)\quad \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i},$$

$$(15)\quad -\frac{\partial a_i}{\partial t_{i'}} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t_{i'}}\frac{\partial q_1}{\partial b_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial t_{i'}}\frac{\partial q_2}{\partial b_i} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial t_{i'}}\frac{\partial q_m}{\partial b_i};$$

aus (6):

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial t_i}\dfrac{\partial a_1}{\partial q_{i'}} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial t_i}\dfrac{\partial a_2}{\partial q_{i'}} + \cdots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial t_i}\dfrac{\partial a_m}{\partial q_{i'}} \\ = \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_{i'}}\dfrac{\partial q_1}{\partial t_i} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_{i'}}\dfrac{\partial q_2}{\partial t_i} + \cdots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial q_{i'}}\dfrac{\partial q_m}{\partial t_i}, \end{cases}$$

$$(17)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial t_i}\frac{\partial a_1}{\partial p_{i'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial t_i}\frac{\partial a_2}{\partial p_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial t_i}\frac{\partial a_m}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial t_i},$$

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial t_i}\dfrac{\partial a_1}{\partial t_{i'}} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial t_i}\dfrac{\partial a_2}{\partial t_{i'}} + \cdots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_m \partial t_i}\dfrac{\partial a_m}{\partial t_{i'}} \\ = \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t_{i'}}\dfrac{\partial q_1}{\partial t_i} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial t_{i'}}\dfrac{\partial q_2}{\partial t_i} + \cdots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial t_{i'}}\dfrac{\partial q_m}{\partial t_i}. \end{cases}$$

Wenn man auf beiden Seiten der Gleichungen (10), (12), (16), (18) bezüglich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_{i'} \partial a_i}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t_{i'} \partial a_i}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_{i'} \partial t_i}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t_{i'} \partial t_i}$$

addiert, so lassen sich die gefundenen Gleichungen (10)—(18) so schreiben:

$$(10^*)\quad \frac{\partial b_i}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i},$$

$$(11^*)\quad \frac{\partial b_i}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i},$$

$$(12^*)\quad \frac{\partial b_i}{\partial t_{i'}} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial a_i},$$

$$(13^*)\quad \frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}} = -\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i},$$

$$(14^*)\quad \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i},$$

$$(15^*)\quad \frac{\partial a_i}{\partial t_{i'}} = -\frac{\partial T_{i'}}{\partial b_i},$$

$$(16^*)\quad \frac{\partial T_i}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{i'}}{\partial t_i},$$

$$(17^*)\quad \frac{\partial T_i}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial t_i},$$

$$(18^*)\quad \frac{\partial T_i}{\partial t_{i'}} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial t_i}.$$

Um die obigen neun Gleichungen, die wichtige und elegante Theoreme sind, richtig zu verstehen, muß man festhalten, daß

sich die Ausdrücke auf der linken Seite alle auf die zweite Annahme beziehen, nach der die $2m$ Größen a_i und b_i als Funktionen von $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m, t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ betrachtet werden, die den Gleichungen (1) und (2) identisch genügen; diese Werte der a_i und b_i sind auch in die Ausdrücke T_i einzusetzen, bevor sie nach $t_{i'}$ differentiiert werden. Dagegen stützen sich die Ausdrücke auf der rechten Seite alle auf die erste Annahme, nach der die $2m$ Größen q_i und p_i als Funktionen von $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m, t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ betrachtet werden, die den Gleichungen (1) und (2) identisch genügen; diese Werte der q_i und p_i sind in die Ausdrücke $T_{i'}$ einzusetzen, bevor sie nach t_i differentiiert werden.

§ 70. Die Integralgleichungen des vorgelegten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen werden hauptsächlich unter zwei Formen betrachtet. Entweder werden nämlich alle Unbekannten durch eine von ihnen (z. B. bei den mechanischen Problemen die Zeit) und durch die willkürlichen Konstanten ausgedrückt, die die vollständige Integration mit sich bringt, oder es werden die willkürlichen Konstanten durch die Unbekannten ausgedrückt. Hierbei nenne ich Unbekannte auch deren Ableitungen, soweit ihre Ordnung niedriger ist als die höchste Ordnung, zu der sie in den vorgelegten Differentialgleichungen aufsteigen. Die Gleichungen der zweiten Form sind so beschaffen, daß durch einmalige Differentiation alle willkürlichen Konstanten von selbst herausfallen und daher die so entstehenden Differentialgleichungen vermöge der vorgelegten Differentialgleichungen von selbst erfüllt sind; solche Integralgleichungen habe ich insbesondere Integrale der vorgelegten Differentialgleichungen genannt. Die Integralgleichungen, die die elliptische Bewegung eines Punktes betreffen, der nach dem *Newton*schen Gesetz von einem festen Punkt angezogen wird, sind öfter unter beiden Formen angegeben worden; zu verschiedenen Zwecken sind die partiellen Differentialquotienten ermittelt worden, die sich ergeben, wenn man bei der einen Form die Unbekannten nach den einzelnen willkürlichen Konstanten oder bei der anderen Form die den willkürlichen Konstanten gleichgesetzten Funktionen nach den einzelnen Unbekannten differentiiert. Deshalb erscheint mir erwähnenswert, was aus den obigen Formeln hervorgeht, wenn ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen vorliegt, wie es bei mechanischen Problemen zu integrieren ist:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}.$$

Wird ein kanonisches System von willkürlichen Konstanten oder Elementen ausgewählt, so werden die Ableitungen der Unbekannten nach den Elementen oder der Elemente nach den Unbekannten einzeln gleich, oder sie unterscheiden sich nur im Vorzeichen.

Es sei nämlich in den obigen Formeln $\mu = 1$, d. h. es sei nur eine von den Größen $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ da, die ich t nennen will. Setzt man in dem Ausdruck

$$\frac{\partial V}{\partial t} = T$$

an Stelle von $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ihre durch $q_1, q_2, \ldots, q_m$, $p_1, p_2, \ldots, p_m, t$ ausgedrückten Werte ein, wie sie aus den m Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m$$

erhalten werden, so gehe T in $-H$ über; $-H$ sei also der Ausdruck von T bei der zweiten Annahme. V wird daher das Integral der partiellen Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

sein; dieses Integral wird m willkürliche Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ enthalten. Wir wollen in den Gleichungen

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \dfrac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial V}{\partial q_m} = p_m, \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \dfrac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial V}{\partial a_m} = b_m, \end{array} \right.$$

aus denen die Gleichungen (10*)—(18*) des vorigen Paragraphen folgten, $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ als Konstanten betrachten, so daß nach jenen Gleichungen $q_1, q_2,$

$\ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ Funktionen von t allein werden. Schreiben wir auf der linken Seite der Gleichungen (16*), (17*) des vorigen Paragraphen $-H$ an Stelle von T_i, so erhalten wir $2m$ Differentialgleichungen, denen die Gleichungen (2) genügen:

$$(3) \qquad -\frac{\partial H}{\partial q_{i'}} = \frac{dp_{i'}}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_{i'}} = \frac{dq_{i'}}{dt}.$$

In diesen Formeln sind dem Index i' die Werte $1, 2, \ldots, m$ beizulegen. Die Gleichungen (10*)—(15*) liefern aber das angegebene Theorem, daß nämlich die partiellen Ableitungen der Veränderlichen nach den Elementen den partiellen Ableitungen der Elemente nach den Veränderlichen einzeln gleich sind. Wenn die Funktion H das t nicht enthält, ein Fall, der bei mechanischen Problemen sehr häufig vorkommt, so kann man folgendermaßen verfahren. Nehmen wir an, daß im vorigen Paragraphen die Funktion V die Größen $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ überhaupt nicht enthält; ferner wollen wir h an Stelle von a_m schreiben, an Stelle von b_m aber $t+\tau$. Dann werden die Gleichungen (1) und (2) des vorigen Paragraphen:

$$(4) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m,$$

$$(5) \qquad \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_{m-1}} = b_{m-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t+\tau.$$

Durch Elimination von $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ aus (4) ergebe sich

$$H = h,$$

wobei H eine Funktion von $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ ist, die h nicht enthält. Man kann also auch umgekehrt V als vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$H = h$$

betrachten, in der $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ willkürliche Konstanten sind (die willkürliche Konstante, die mit der Funktion V rein additiv verbunden werden kann, berücksichtigen wir wie gewöhnlich nicht); h ist eine gegebene Konstante, die schon in der Differentialgleichung selbst auftritt. Betrachten wir ferner in den Gleichungen (4), (5) $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, h, b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}, \tau$ als Konstanten, so werden nach jenen Gleichungen

$q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ gegebene Funktionen der Größen t sein. Setzen wir in den Gleichungen (13*), (14*) des vorigen Paragraphen $i = m$, und schreiben wir, wie vereinbart wurde, h und $t + \tau$ an Stelle von a_m, b_m, so wird auf der linken Seite jener Gleichungen mit Hilfe der Gleichungen (4), (5) a_m oder h durch $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ auszudrücken sein, d. h. es ist für a_m zu setzen H. Bemerken wir dann noch, daß an Stelle der Ausdrücke $\frac{\partial q_{i'}}{\partial b_m}, \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_m}$ oder $\frac{\partial q_{i'}}{\partial (t+\tau)}, \frac{\partial p_{i'}}{\partial (t+\tau)}$, wenn t als unabhängige Veränderliche betrachtet wird, zu schreiben ist

$$\frac{\partial q_{i'}}{\partial b_m} = \frac{d q_{i'}}{dt}, \quad \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_m} = \frac{d p_{i'}}{dt},$$

so gehen die Gleichungen (13*), (14*) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen über, die den Gleichungen (4), (5) genügen:

$$\frac{\partial H}{\partial q_{i'}} = -\frac{d p_{i'}}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_{i'}} = \frac{d q_{i'}}{dt}.$$

Und umgekehrt werden diese Differentialgleichungen durch die Gleichungen (4), (5) vollständig integriert. Ferner liefern die Gleichungen (10*), (11*), (13*), (14*) des vorigen Paragraphen die Formeln:

$$\frac{\partial b_i}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i}, \quad \frac{\partial b_i}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i},$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}} = -\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i}, \quad \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i},$$

in denen dem Index i die Werte $1, 2, \ldots, m-1$, dem Index i' die Werte $1, 2, \ldots, m$ beizulegen sind, und es wird

$$\frac{\partial \tau}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{i'}}{\partial h}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial h};$$

in diesen Gleichungen sind dem Index i' wieder die Werte $1, 2, \ldots, m$ beizulegen.*)

---

*) Formeln dieser Art, die ich der Berliner Akademie der Wissenschaften mitgeteilt habe, finden sich schon in meiner kleinen Abhandlung: »Neues Theorem der analytischen Mechanik« (Crelles Journal, Bd. XXX, S. 117), [Jacobis W. Bd. IV, S. 137]. *Clebsch.*

Die obigen Formeln werden angewandt auf die freie Bewegung von n materiellen Punkten, bei denen die Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kräfte gilt.

§ 71. Es scheint mir der Mühe wert zu sein, einiges von dem, was wir oben gefunden haben, für den Fall eines nur inneren Kräften unterworfenen freien Systems in einem besonderen Theorem auszusprechen. In diesem Falle wollen wir an Stelle der Größen q_i die rechtwinkligen Koordinaten setzen, so daß an Stelle der p_i die Ausdrücke $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$ zu setzen sind.

Theorem.

Betrachten wir die Bewegung eines freien Systems von n materiellen Punkten; x_i, y_i, z_i seien die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes mit der Masse m_i, und auf die einzelnen Punkte m_i mögen in der Richtung der Koordinatenachsen die Kräfte $m_i X_i$, $m_i Y_i$, $m_i Z_i$ wirken, die so beschaffen sind, daß die über alle Punkte des Systems erstreckte Summe

$$\sum m_i (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

ein vollständiges Differential

$$dU = \sum m_i (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

wird. Dieser Fall liegt vor, so oft das System von materiellen Punkten nur inneren Kräften der Anziehung oder Abstoßung unterworfen ist. Um die Bewegung des Systems zu finden, integriere man die partielle Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i} \right)^2 \right\} = U + h ,$$

in der h eine Konstante ist. Hat man die vollständige Lösung V gefunden, die außer der Konstanten, die rein additiv mit ihr verbunden werden kann, die willkürlichen Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_{3n-1}$ enthält, so

werden die endlichen Gleichungen, durch die die Bewegungen der Punkte definiert werden, lauten:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_{3n-1}} = b_{3n-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau,$$

wobei $b_1, b_2, \ldots, b_{3n-1}, \tau$ neue willkürliche Konstanten bezeichnen. Ferner wird sein:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = m_1 \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = m_2 \frac{dx_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} = m_n \frac{dx_n}{dt},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = m_1 \frac{dy_1}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial y_2} = m_2 \frac{dy_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial y_n} = m_n \frac{dy_n}{dt},$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = m_1 \frac{dz_1}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial z_2} = m_2 \frac{dz_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial z_n} = m_n \frac{dz_n}{dt}.$$

Nach den angegebenen Gleichungen lassen sich, wenn man

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt}, \quad y_i' = \frac{dy_i}{dt}, \quad z_i' = \frac{dz_i}{dt}$$

setzt, die $6n$ Größen $x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i'$ als Funktionen der $6n$ Größen $a_1, a_2, \ldots, a_{3n-1}, h, b_1, b_2, \ldots, b_{3n-1}, t + \tau$ betrachten, oder man kann umgekehrt die $6n$ Größen $a_1, a_2, \ldots, a_{3n-1}, h, b_1, b_2, \ldots, b_{3n-1}, t + \tau$ als Funktionen der $6n$ Größen $x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i'$ ansehen.

Bildet man unter den beiden Voraussetzungen die partiellen Ableitungen jener Funktionen, so werden die unter der einen Voraussetzung gebildeten Ableitungen den unter der anderen Voraussetzung gebildeten Ableitungen einzeln gleich, oder sie unterscheiden sich nur im Zeichen. Es wird nämlich, wenn i irgend eine der Zahlen 1, 2, ..., n und k irgend eine der Zahlen 1, 2, 3, ..., $3n-1$ bezeichnet,

$$m_i \frac{\partial x_i}{\partial a_k} = -\frac{\partial b_k}{\partial x_i'}, \quad m_i \frac{\partial x_i}{\partial b_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i'},$$

$$m_i \frac{\partial y_i}{\partial a_k} = -\frac{\partial b_k}{\partial y_i'}, \quad m_i \frac{\partial y_i}{\partial b_k} = \frac{\partial a_k}{\partial y_i'},$$

$$m_i \frac{\partial z_i}{\partial a_k} = -\frac{\partial b_k}{\partial z_i'}, \quad m_i \frac{\partial z_i}{\partial b_k} = \frac{\partial a_k}{\partial z_i'},$$

$$m_i \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \frac{\partial b_k}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{\partial x_i'}{\partial b_k} = -\frac{\partial a_k}{\partial x_i},$$
$$m_i \frac{\partial y_i'}{\partial a_k} = \frac{\partial b_k}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{\partial y_i'}{\partial b_k} = -\frac{\partial a_k}{\partial y_i},$$
$$m_i \frac{\partial z_i'}{\partial a_k} = \frac{\partial b_k}{\partial z_i}, \quad m_i \frac{\partial z_i'}{\partial b_k} = -\frac{\partial a_k}{\partial z_i},$$
$$m_i \frac{\partial x_i}{\partial h} = -\frac{\partial(\tau + t)}{\partial x_i'}, \quad m_i \frac{\partial x_i'}{\partial h} = \frac{\partial(\tau + t)}{\partial x_i},$$
$$m_i \frac{\partial y_i}{\partial h} = -\frac{\partial(\tau + t)}{\partial y_i'}, \quad m_i \frac{\partial y_i'}{\partial h} = \frac{\partial(\tau + t)}{\partial y_i},$$
$$m_i \frac{\partial z_i}{\partial h} = -\frac{\partial(\tau + t)}{\partial z_i'}, \quad m_i \frac{\partial z_i'}{\partial h} = \frac{\partial(\tau + t)}{\partial z_i}.$$

Nehmen wir an, daß die vorliegenden Bewegungen gestört werden, indem zu den auf den Punkt m_i wirkenden Kräften $m_i X_i$, $m_i Y_i$, $m_i Z_i$ neue Kräfte $m_i X_i'$, $m_i Y_i'$, $m_i Z_i'$ hinzutreten, wobei X_i', Y_i', Z_i' Funktionen aller $3n$ Koordinaten x_i, y_i, z_i und der Zeit bezeichnen. Es sei überdies, wenn nur die Koordinaten und nicht zugleich die Zeit variiert werden, die über alle Punkte des Systems erstreckte Summe

$$\sum m_i(X_i'\,\delta x_i + Y_i'\,\delta y_i + Z_i'\,\delta z_i)$$

eine vollständige Variation

$$-\,\delta\Omega = \sum m_i(X_i'\,\delta x_i + Y_i'\,\delta y_i + Z_i'\,\delta z_i)\,.$$

Dies festgesetzt, werden die Gleichungen des ungestörten Problems

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \cdots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_{3n-1}} = b_{3n-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau,$$
$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = m_1 x_1', \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = m_2 x_2', \quad \cdots, \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} = m_n x_n',$$
$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = m_1 y_1', \quad \frac{\partial V}{\partial y_2} = m_2 y_2', \quad \cdots, \quad \frac{\partial V}{\partial y_n} = m_n y_n',$$
$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = m_1 z_1', \quad \frac{\partial V}{\partial z_2} = m_2 z_2', \quad \cdots, \quad \frac{\partial V}{\partial z_n} = m_n z_n'$$

auch die gestörten Bewegungen liefern, wenn man an Stelle der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_{3n-1}, h, b_1, b_2, \ldots, b_{3n-1}, \tau$ Funktionen der Zeit nimmt, die den Differentialgleichungen genügen:

$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \frac{da_2}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_2}, \quad \ldots, \quad \frac{da_{3n-1}}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_{3n-1}},$$

$$\frac{db_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, \quad \frac{db_2}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{db_{3n-1}}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_{3n-1}},$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial h};$$

in diesen Gleichungen wird angenommen, daß die Funktion Ω mit Hilfe der für die ungestörte Bewegung gefundenen Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_{3n-1}} = b_{3n-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau$$

durch Elemente und Zeit allein ausgedrückt ist.

Die im vorstehenden Theorem angegebene partielle Differentialgleichung wird aus der Gleichung

$$H = T - U = h$$

gefunden, da T die Summe der lebendigen Kräfte ist

$$T = \tfrac{1}{2}\sum m_i(x_i'x_i' + y_i'y_i' + z_i'z_i'),$$

während die Gleichungen

$$\frac{\partial T}{\partial q_i'} = p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

die in die Gleichung $H = h$ einzusetzen sind, damit die partielle Differentialgleichung hervorgeht, hier lauten

$$m_i x_i' = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i y_i' = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i z_i' = \frac{\partial V}{\partial z_i}.$$

Es geht daher die Gleichung

$$H = \tfrac{1}{2}\sum m_i(x_i'x_i' + y_i'y_i' + z_i'z_i') - U = h$$

über in die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\sum \frac{1}{m_i}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right\} - U = h ,$$

das ist die in dem obigen Theorem angegebene partielle Differentialgleichung. Die Störungsformeln des Theorems sind dem § 52 entnommen, wobei h und τ für a und b geschrieben sind. Dieselben Ausdrücke für die Ableitungen der Elemente erhält man auch bei den allgemeineren Differentialgleichungen, in denen Ω außer den x_i, y_i, z_i auch die Größen x_i', y_i', z_i' enthalten darf:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i' + \frac{1}{m_i}\frac{\partial \Omega}{\partial x_i'}, \quad \frac{dy_i}{dt} = y_i' + \frac{1}{m_i}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}, \quad \frac{dz_i}{dt} = z_i' + \frac{1}{m_i}\frac{\partial \Omega}{\partial z_i'},$$

$$m_i\frac{dx_i'}{dt} = \frac{\partial (U-\Omega)}{\partial x_i}, \quad m_i\frac{dy_i'}{dt} = \frac{\partial (U-\Omega)}{\partial y_i}, \quad m_i\frac{dz_i'}{dt} = \frac{\partial (U-\Omega)}{\partial z_i};$$

diese Gleichungen gehen, so oft Ω die x_i', y_i', z_i' nicht enthält, wieder in die gestörten Differentialgleichungen über, wie man sie gewöhnlich hat:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial (U-\Omega)}{\partial x_i}, \quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial (U-\Omega)}{\partial y_i}, \quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial (U-\Omega)}{\partial z_i}.$$

Will man das obige Theorem auf die elliptische Bewegung der Planeten anwenden, so können wir, wie es in den Formeln des § 67 geschehen ist, setzen

$$\begin{aligned} h &= -\frac{\varkappa^2}{2A}, & a_1 &= \varkappa\sqrt{p}\cos i, & a_2 &= \varkappa\sqrt{p}, \\ b &= \tau, & b_1 &= \Omega, & \frac{\pi}{2} + b_2 &= \varpi, \end{aligned}$$

wobei A, p, i, $-\tau$, ☊, ϖ die halbe große Achse, den halben Parameter, die Neigung, die Perihelzeit, die Länge des aufsteigenden Knotens, den Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten bezeichnen und $\varkappa^2$ die anziehende Kraft für die Einheit des Abstands. Wenn wir die x, y, z, x', y', z' durch A, p, $\sqrt{p}\cos i$, τ, ☊, ϖ, t ausdrücken oder umgekehrt A, p, i, τ, ☊, ϖ durch die x, y, z, x', y', z' und jene Ausdrücke unter beiden Voraussetzungen differentiieren, so ergeben sich aus dem obigen Theorem die Formeln:

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial x}{\partial(\sqrt{p}\cos i)} = -\varkappa\dfrac{\partial \Omega}{\partial x'}, & \dfrac{\partial y}{\partial(\sqrt{p}\cos i)} = -\varkappa\dfrac{\partial \Omega}{\partial y'}, & \dfrac{\partial z}{\partial(\sqrt{p}\cos i)} = -\varkappa\dfrac{\partial \Omega}{\partial z'}, \\
\dfrac{\partial x}{\partial \Omega} = \varkappa\dfrac{\partial(\sqrt{p}\cos i)}{\partial x'}, & \dfrac{\partial y}{\partial \Omega} = \varkappa\dfrac{\partial(\sqrt{p}\cos i)}{\partial y'}, & \dfrac{\partial z}{\partial \Omega} = \varkappa\dfrac{\partial(\sqrt{p}\cos i)}{\partial z'}, \\
\dfrac{\partial x}{\partial \sqrt{p}} = -\varkappa\dfrac{\partial \varpi}{\partial x'}, & \dfrac{\partial y}{\partial \sqrt{p}} = -\varkappa\dfrac{\partial \varpi}{\partial y'}, & \dfrac{\partial z}{\partial \sqrt{p}} = -\varkappa\dfrac{\partial \varpi}{\partial z'}, \\
\dfrac{\partial x}{\partial \varpi} = \varkappa\dfrac{\partial \sqrt{p}}{\partial x'}, & \dfrac{\partial y}{\partial \varpi} = \varkappa\dfrac{\partial \sqrt{p}}{\partial y'}, & \dfrac{\partial z}{\partial \varpi} = \varkappa\dfrac{\partial \sqrt{p}}{\partial z'}, \\
2A^2\dfrac{\partial x}{\partial A} = -\varkappa^2\dfrac{\partial \tau}{\partial x'}, & 2A^2\dfrac{\partial y}{\partial A} = -\varkappa^2\dfrac{\partial \tau}{\partial y'}, & 2A^2\dfrac{\partial z}{\partial A} = -\varkappa^2\dfrac{\partial \tau}{\partial z'}, \\
\dfrac{\partial x'}{\partial(\sqrt{p}\cos i)} = \varkappa\dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, & \dfrac{\partial y'}{\partial(\sqrt{p}\cos i)} = \varkappa\dfrac{\partial \Omega}{\partial y}, & \dfrac{\partial z'}{\partial(\sqrt{p}\cos i)} = \varkappa\dfrac{\partial \Omega}{\partial z}, \\
\dfrac{\partial x'}{\partial \Omega} = -\varkappa\dfrac{\partial(\sqrt{p}\cos i)}{\partial x}, & \dfrac{\partial y'}{\partial \Omega} = -\varkappa\dfrac{\partial(\sqrt{p}\cos i)}{\partial y}, & \dfrac{\partial z'}{\partial \Omega} = -\varkappa\dfrac{\partial(\sqrt{p}\cos i)}{\partial z}, \\
\dfrac{\partial x'}{\partial \sqrt{p}} = \varkappa\dfrac{\partial \varpi}{\partial x}, & \dfrac{\partial y'}{\partial \sqrt{p}} = \varkappa\dfrac{\partial \varpi}{\partial y}, & \dfrac{\partial z'}{\partial \sqrt{p}} = \varkappa\dfrac{\partial \varpi}{\partial z}, \\
\dfrac{\partial x'}{\partial \varpi} = -\varkappa\dfrac{\partial \sqrt{p}}{\partial x}, & \dfrac{\partial y'}{\partial \varpi} = -\varkappa\dfrac{\partial \sqrt{p}}{\partial y}, & \dfrac{\partial z'}{\partial \varpi} = -\varkappa\dfrac{\partial \sqrt{p}}{\partial z}, \\
2A^2\dfrac{\partial x'}{\partial A} = \varkappa^2\dfrac{\partial \tau}{\partial x}, & 2A^2\dfrac{\partial y'}{\partial A} = \varkappa^2\dfrac{\partial \tau}{\partial y}, & 2A^2\dfrac{\partial z'}{\partial A} = \varkappa^2\dfrac{\partial \tau}{\partial z}.
\end{array}
$$

In diesen Formeln bezeichnet i die Neigung der Bahnebene gegen eine Ebene der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z und ☊ den Winkel, den der Schnitt beider Ebenen mit der einen Koordinatenachse bildet, die in jener Koordinatenebene gezogen ist. Aus den bekannten Formeln der elliptischen Bewegung kann man leicht eine Verifikation der obigen Formeln gewinnen. Sie lassen sich auch leicht in verschiedene andere Formen umgießen.

Über die Ausdrücke (φ, ψ) und $[\varphi, \psi]$, die nach Art der in den Störungsformeln von Lagrange und Poisson auftretenden Koeffizienten gebildet sind. Wenn irgend ein Integral $H_i = a_i$ der dynamischen Gleichungen bekannt wird, so lassen sich alle Ableitungen einer beliebigen Funktion nach dem Element b_i, das in irgend einem kanonischen System von Elementen zu a_i konjugiert ist, angeben.

§ 72. Setzen wir wieder

$$[\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial \psi}{\partial p_m} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial \psi}{\partial q_m},$$

ferner unter Anwendung runder Klammern

$$(\varphi, \psi) = \frac{\partial q_1}{\partial \psi}\frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial q_2}{\partial \psi}\frac{\partial p_2}{\partial \varphi} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial \psi}\frac{\partial p_m}{\partial \varphi} - \frac{\partial q_1}{\partial \varphi}\frac{\partial p_1}{\partial \psi} - \frac{\partial q_2}{\partial \varphi}\frac{\partial p_2}{\partial \psi} - \cdots - \frac{\partial q_m}{\partial \varphi}\frac{\partial p_m}{\partial \psi}.$$

Dann läßt sich aus den in § 69 mitgeteilten Formeln leicht beweisen, daß man hat:

$$(1) \qquad [a_i, a_k] = 0, \quad [a_i, b_k] = 0, \quad [b_i, b_k] = 0,$$

$$(2) \qquad (a_i, a_k) = 0, \quad (a_i, b_k) = 0, \quad (b_i, b_k) = 0,$$

mit Ausnahme der Gleichungen

$$(3) \qquad [a_i, b_i] = -1,$$

$$(4) \qquad (a_i, b_i) = 1.$$

Die Formeln (1) beziehen sich auf die zweite Annahme, bei der wir die a_i, b_i als Funktionen der q_i, p_i, t betrachtet

haben, die Formeln (2) auf die erste Annahme, bei der die q_i, p_i als Funktionen der a_i, b_i, t betrachtet werden. Diese Formeln beweist man aus (10*)ff. in § 69 folgendermaßen:

Man hat, wenn die Summation sich über die Werte $1, 2, \ldots, m$ von i' erstreckt:

$$0 = \frac{\partial a_k}{\partial a_i} = \sum_{i'} \left(\frac{\partial a_k}{\partial q_{i'}} \frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i} + \frac{\partial a_k}{\partial p_{i'}} \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i} \right),$$

$$0 = \frac{\partial a_k}{\partial b_i} = \sum_{i'} \left(\frac{\partial a_k}{\partial q_{i'}} \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i} + \frac{\partial a_k}{\partial p_{i'}} \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i} \right),$$

$$0 = \frac{\partial b_k}{\partial a_i} = \sum_{i'} \left(\frac{\partial b_k}{\partial q_{i'}} \frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i} + \frac{\partial b_k}{\partial p_{i'}} \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i} \right),$$

$$0 = \frac{\partial b_k}{\partial b_i} = \sum_{i'} \left(\frac{\partial b_k}{\partial q_{i'}} \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i} + \frac{\partial b_k}{\partial p_{i'}} \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i} \right),$$

mit Ausnahme der Fälle, wo in der ersten und vierten Gleichung $k = i$ ist, in welchen Fällen man hat:

$$1 = \sum_{i'} \left(\frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}} \frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i} + \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}} \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i} \right),$$

$$1 = \sum_{i'} \left(\frac{\partial b_i}{\partial q_{i'}} \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i} + \frac{\partial b_i}{\partial p_{i'}} \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i} \right).$$

Setzen wir in den obigen Formeln die Gleichungen (10*), (11*), (13*), (14*) des § 69 ein

$$\frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i} = \frac{\partial b_i}{\partial q_{i'}}, \quad \frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i} = -\frac{\partial b_i}{\partial p_{i'}}, \quad \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i} = -\frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}}, \quad \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i} = \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}},$$

so gehen jene in die folgenden über:

$$-[a_k, b_i] = 0, \quad [a_k, a_i] = 0, \quad [b_i, b_k] = 0, \quad -[a_i, b_k] = 0,$$
$$1 = -[a_i, b_i] = [b_i, a_i],$$

die mit den zu beweisenden Gleichungen (1), (3) zusammenfallen.

Jetzt wollen wir in denselben Formeln wieder die Gleichungen (10*)—(14*) des § 69 einsetzen, in denen wir jedoch k an Stelle des Index i schreiben, so daß sie lauten:

$$\frac{\partial b_k}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{i'}}{\partial a_k}, \quad \frac{\partial b_k}{\partial p_{i'}} = -\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_k}, \quad \frac{\partial a_k}{\partial q_{i'}} = -\frac{\partial p_{i'}}{\partial b_k}, \quad \frac{\partial a_k}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_k}.$$

Setzen wir sie ein, so gehen die oben angegebenen Gleichungen in die folgenden über:

$$0 = (a_i, b_k), \quad 0 = (b_i, b_k), \quad 0 = (a_k, a_i), \quad 0 = (a_k, b_i),$$
$$1 = (a_i, b_i),$$

die mit den zu beweisenden Gleichungen (2), (4) zusammenfallen.

Es seien φ, ψ beliebige gegebene Funktionen von a_1, a_2, $\ldots$, a_m, b_1, b_2, $\ldots$, b_m, die die Größen t_1, t_2, $\ldots$, t_μ nicht enthalten. Setzt man die durch die q_i, p_i, t_i ausgedrückten Werte der a_i, b_i, ein, so werden φ, ψ Funktionen von diesen Größen, und es wird sein:

$$[\varphi, \psi] = \sum_{i'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_{i'}} \frac{\partial \psi}{\partial p_{i'}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{i'}} \frac{\partial \psi}{\partial q_{i'}} \right)$$

$$= \sum_{i'} \left\{ \begin{array}{l} \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} \frac{\partial b_i}{\partial q_{i'}} \right) \sum_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial p_{i'}} + \frac{\partial \psi}{\partial b_k} \frac{\partial b_k}{\partial p_{i'}} \right) \\ - \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial p_{i'}} + \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} \frac{\partial b_i}{\partial p_{i'}} \right) \sum_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \psi}{\partial b_k} \frac{\partial b_k}{\partial q_{i'}} \right) \end{array} \right\}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich so darstellen:

$$[\varphi, \psi] = \sum_{i,k} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial \psi}{\partial a_k} [a_i, a_k] + \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial \psi}{\partial b_k} [a_i, b_k] \right\}$$
$$+ \sum_{i,k} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} \frac{\partial \psi}{\partial a_k} [b_i, a_k] + \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} \frac{\partial \psi}{\partial b_k} [b_i, b_k] \right\}.$$

Nach (1), (3) hat man also:

$$[\varphi, \psi] = \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b_i} \frac{\partial \psi}{\partial a_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} \frac{\partial \psi}{\partial b_i} \right)$$

oder

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m} \frac{\partial \psi}{\partial p_m} \\ \qquad - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} \frac{\partial \psi}{\partial q_m} \\ \qquad = \frac{\partial \varphi}{\partial b_1} \frac{\partial \psi}{\partial a_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial b_2} \frac{\partial \psi}{\partial a_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial b_m} \frac{\partial \psi}{\partial a_m} \\ \qquad - \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} \frac{\partial \psi}{\partial b_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} \frac{\partial \psi}{\partial b_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial a_m} \frac{\partial \psi}{\partial b_m}. \end{array} \right.$$

So oft also der Fall eintritt, daß φ, ψ solche Funktionen der q_i, p_i, t_i sind, die durch die a_i, b_i allein ohne die Größen t_i ausgedrückt werden können, wird auch

$$[\varphi, \psi] = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial \psi}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial \psi}{\partial q_m}$$

eine solche Funktion sein, da sie gleich dem Ausdruck

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_1}\frac{\partial \psi}{\partial a_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial b_2}\frac{\partial \psi}{\partial a_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial b_m}\frac{\partial \psi}{\partial a_m}$$
$$- \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\frac{\partial \psi}{\partial b_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}\frac{\partial \psi}{\partial b_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial a_m}\frac{\partial \psi}{\partial b_m}$$

wird; dieser Ausdruck wird, wenn φ, ψ Funktionen der a_i, b_i allein und von den t_i frei sind, ebenfalls eine von den t_i freie Funktion der a_i, b_i allein sein. Wenn von den Größen t_i nur eine bei dem vorgelegten Problem auftritt, so geht der vorstehende Satz über in folgenden, den seinerzeit *Poisson* bewiesen hat: So oft $\varphi =$ Konst., $\psi =$ Konst. Integrale des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\text{*)}$$

sind, drückt sich $[\varphi, \psi]$ durch die Elemente allein ohne t aus.

Ein sehr bemerkenswerter Spezialfall der Gleichung (5) ist der, wo die Funktion ψ einer der Größen a_i, b_i gleich wird. Dann geht nämlich jene Gleichung in die folgenden einfachen über:

$$(6) \qquad \begin{cases} [\varphi, a_i] = \dfrac{\partial \varphi}{\partial b_i}, \\ [\varphi, b_i] = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_i}. \end{cases}$$

---

*) *Poisson* hat die Differentialgleichungen in anderer Form angegeben. Wenn er nämlich auch in seiner ersten Abhandlung über die Variation der Konstanten bemerkt hat, daß die durch die q_i, p_i dargestellten Ausdrücke für $\frac{dq_i}{dt}$, $\frac{dq_k}{dt}$ so beschaffen sind, daß die Ableitung des ersten nach p_k gleich der Ableitung des zweiten nach p_i ist, so hat doch zuerst *Hamilton* den einfachen Ausdruck $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ angegeben, woraus jene Eigenschaft von selbst folgt.

Diese Gleichungen lehren folgendes: So oft man ein Integral

$$\varphi = \text{Konst.}$$

der vorgelegten Differentialgleichungen hat, läßt sich φ durch die a_i, b_i ohne t ausdrücken; diesen Ausdruck können wir aber im allgemeinen selbst nicht angeben, außer wenn die Ausdrücke aller a_i, b_i durch die q_i, p_i, t gegeben sind. Wenn wir aber auch nur von einem Element, das zu einem kanonischen System von Elementen gehört, den Ausdruck durch die q_i, p_i, t kennen, so kann man direkt die Ableitungen von φ nach dem konjugierten Element finden, ebenfalls ausgedrückt durch die q_i, p_i, t; dabei nennen wir die beiden Elemente a_i und b_i konjugiert. Ist nämlich das gegebene kanonische Element a_i, so hat man nach (6):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_i} = [\varphi, a_i],$$

woraus, wenn man $\frac{\partial \varphi}{\partial b_i}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_i^2}$, $\cdots$ an Stelle von φ setzt, hervorgeht:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_i^2} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial b_i}, a_i\right], \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial b_i^3} = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_i^2}, a_i\right], \cdots$$

Es ergeben sich also nacheinander die Werte aller $\frac{\partial^n \varphi}{\partial b_i^n}$ ausgedrückt durch die q_i, p_i, t. Wenn man nur ein Integral $\psi = a_i$ hat, so kann die ψ gleiche Konstante als kanonisches Element angenommen werden; auszunehmen ist jedoch der Fall, wo $\psi = H$ ist, was geschehen kann, wenn H das t nicht enthält; in diesem Falle hat man nämlich, so oft $\varphi =$ Konst. ein anderes Integral ist, $[\varphi, a_i] = 0$, und es ergibt sich daraus nichts Neues.

Bei den weiteren und tiefergehenden Untersuchungen, die die vorgelegten Integrationen erfordern, damit alles noch Verborgene ans Licht kommt, müssen die Gleichungen (6) eine große Rolle spielen. Um sie näher zu erläutern, will ich sie direkt aus den in § 69 angegebenen Gleichungen ableiten. Das geschieht durch folgende Betrachtungen. Es sei a_i eine gegebene Funktion von $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m, t$. Wir wollen t, wenn es in der Funktion a_i vorkommt, als gegebene Konstante betrachten und $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ alle, mit Ausnahme von b_i allein, als willkürliche Konstanten.

Dann werden $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ Funktionen von b_i sein, die den Differentialgleichungen (13*), (14*) des § 69 genügen:

$$\frac{dq_1}{db_i} = \frac{\partial a_i}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{db_i} = \frac{\partial a_i}{\partial p_2}, \ldots, \frac{dq_m}{db_i} = \frac{\partial a_i}{\partial p_m},$$

$$\frac{dp_1}{db_i} = -\frac{\partial a_i}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{db_i} = -\frac{\partial a_i}{\partial q_2}, \ldots, \frac{dp_m}{db_i} = -\frac{\partial a_i}{\partial q_m};$$

diese haben genau dieselbe Form wie die vorgelegten Differentialgleichungen, nur daß a_i an Stelle der Funktion H und die Veränderliche b_i an Stelle der Veränderlichen t steht. Nach den gewöhnlichen Differentiationsregeln lassen sich aus den obigen Gleichungen für jede beliebige Funktion der $q_{i'}$, $p_{i'}$ die ersten, zweiten, dritten ... Ableitungen nacheinander ermitteln, indem man fortgesetzt für die Ableitungen $\frac{dq_{i'}}{db_i}$, $\frac{dp_{i'}}{db_i}$ ihre Werte einsetzt; es ist ja ganz bekannt, daß man aus dem System von Differentialgleichungen

$$\frac{dq_{i'}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{i'}}, \quad \frac{dp_{i'}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_{i'}}$$

für jede beliebige Funktion die Ableitungen jeder beliebigen Ordnung ausgedrückt durch die $q_{i'}$, $p_{i'}$, t finden kann. Sucht man z. B. für die Funktion φ die erste Ableitung nach b_i, so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{db_i} &= \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{dq_1}{db_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{dq_2}{db_i} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{dq_m}{db_i} \\
&\quad + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{dp_1}{db_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{dp_2}{db_i} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{dp_m}{db_i} \\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial a_i}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial a_i}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial a_i}{\partial p_m} \\
&\quad - \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial a_i}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial a_i}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial a_i}{\partial q_m} \\
&= [\varphi, a_i];
\end{aligned}$$

das ist die eine der Gleichungen (6), und nach derselben Methode beweist man die andere.

Ich bemerke noch, daß man in den Formeln des § 69 und in den obigen, die aus ihnen abgeleitet sind, überall a, b und q, p miteinander vertauschen kann.

Die a_i, b_i seien durch andere Größen α, β, γ ... ausgedrückt; wir wollen noch den Wert des Ausdrucks

$$(\alpha, \beta) = \frac{\partial q_1}{\partial \beta}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial q_2}{\partial \beta}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial \beta}\frac{\partial p_m}{\partial \alpha}$$
$$- \frac{\partial q_1}{\partial \alpha}\frac{\partial p_1}{\partial \beta} - \frac{\partial q_2}{\partial \alpha}\frac{\partial p_2}{\partial \beta} - \cdots - \frac{\partial q_m}{\partial \alpha}\frac{\partial p_m}{\partial \beta}$$

suchen. Es wird

$$(\alpha, \beta) = \sum \left\{ \left(\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial \beta} + \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial \alpha} + \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_k}\frac{\partial b_k}{\partial \alpha}\right)\right\}$$
$$- \sum \left\{ \left(\frac{\partial q_{i'}}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial \alpha} + \frac{\partial q_{i'}}{\partial b_k}\frac{\partial b_k}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial p_{i'}}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial \beta} + \frac{\partial p_{i'}}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial \beta}\right)\right\},$$

wobei den Indizes i', i, k die Werte 1, 2, ..., m beizulegen sind. Entwickeln wir die Produkte, so gewinnen wir aus der vorstehenden Gleichung

$$(\alpha, \beta) = \sum \left\{ (a_k, a_i)\frac{\partial a_i}{\partial \beta}\frac{\partial a_k}{\partial \alpha} + (b_k, a_i)\frac{\partial a_i}{\partial \beta}\frac{\partial b_k}{\partial \alpha}\right.$$
$$\left. + (a_k, b_i)\frac{\partial b_i}{\partial \beta}\frac{\partial a_k}{\partial \alpha} + (b_k, b_i)\frac{\partial b_i}{\partial \beta}\frac{\partial b_k}{\partial \alpha}\right\},$$

wobei den Indizes i und k unter dem Summenzeichen die Werte 1, 2, ..., m beizulegen sind. Nach den Formeln (2) aber fallen unter dem Summenzeichen alle Glieder fort, für die i und k voneinander verschieden sind. Es folgt also, da nach (4)

$$(a_i, b_i) = 1$$

ist, und offenbar

$$(a_i, a_i) = 0, \quad (b_i, b_i) = 0$$

wird, so folgt

$$(\alpha, \beta) = \sum \left(\frac{\partial a_i}{\partial \alpha}\frac{\partial b_i}{\partial \beta} - \frac{\partial a_i}{\partial \beta}\frac{\partial b_i}{\partial \alpha}\right),$$

d. h.

$$(7) \quad \begin{cases} (\alpha, \beta) = \dfrac{\partial q_1}{\partial \beta}\dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial q_2}{\partial \beta}\dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha} + \cdots + \dfrac{\partial q_m}{\partial \beta}\dfrac{\partial p_m}{\partial \alpha} \\ \qquad - \dfrac{\partial q_1}{\partial \alpha}\dfrac{\partial p_1}{\partial \beta} - \dfrac{\partial q_2}{\partial \alpha}\dfrac{\partial p_2}{\partial \beta} - \cdots - \dfrac{\partial q_m}{\partial \alpha}\dfrac{\partial p_m}{\partial \beta} \\ \qquad = \dfrac{\partial a_1}{\partial \alpha}\dfrac{\partial b_1}{\partial \beta} + \dfrac{\partial a_2}{\partial \alpha}\dfrac{\partial b_2}{\partial \beta} + \cdots + \dfrac{\partial a_m}{\partial \alpha}\dfrac{\partial b_m}{\partial \beta} \\ \qquad - \dfrac{\partial a_1}{\partial \beta}\dfrac{\partial b_1}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial a_2}{\partial \beta}\dfrac{\partial b_2}{\partial \alpha} - \cdots - \dfrac{\partial a_m}{\partial \beta}\dfrac{\partial b_m}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

Nehmen wir an, daß β zu den kanonischen Elementen gehöre, d. h. daß man habe $\beta = a_i$ oder $\beta = b_i$, und daß die Ausdrücke der übrigen Elemente dieses Element nicht enthalten. In diesem Falle geht die obige Formel in die folgenden einfachen über:

$$(8)\quad \begin{cases} (\alpha,\ a_i) = -\dfrac{\partial b_i}{\partial \alpha}, \\ (\alpha,\ b_i) = \dfrac{\partial a_i}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

Nachdem dies bemerkt ist, will ich einiges über die allgemeinen Störungsformeln hinzufügen, die für ein beliebiges System von Elementen gelten.

Die von Lagrange und Poisson aufgestellten Systeme von Störungsformeln werden bewiesen und auseinander abgeleitet.

§ 73. An Stelle von $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ habe man ein beliebiges System von Elementen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}$. In bezug auf sie ist es üblich, die Störungsformeln hauptsächlich unter zwei Formen zu schreiben. Bei der einen, die von *Lagrange* herrührt, werden die partiellen Ableitungen der Störungsfunktion Ω nach den Elementen linear ausgedrückt durch die Ableitungen der Elemente. Bei der anderen, die von *Poisson* herrührt, werden die Ableitungen der gestörten Elemente linear ausgedrückt durch die partiellen Ableitungen der Störungsfunktion Ω nach den Elementen. Bei der einen Form sind die Koeffizienten der linearen Ausdrücke die Funktionen (α_i, α_k), bei der andern die Funktionen $[\alpha_i, \alpha_k]$. Es pflegt meistens bemerkt zu werden, daß die eine Form aus der andern durch bloße Auflösung von $2m$ linearen Gleichungen erhalten werden kann. Niemand aber hat, soviel ich weiß, diese Auflösung wirklich versucht und auf diesem direkten Wege die eine Form aus der andern abgeleitet. Da dies nützlich ist und einen gewissen Schein von Schwierigkeit hat, so will ich es im folgenden auseinandersetzen. Vorher aber will ich die allgemeinen Störungsformeln aus den oben angegebenen ableiten, wenn sie auch direkt aus den Differentialgleichungen selbst gewonnen werden können, wie es gewöhnlich geschieht.

Man sehe zunächst die kanonischen Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ als Funktionen beliebiger anderer Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}$ an. Dann wird nach § 52 sein:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_n} &= \sum_i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial \alpha_n} + \frac{\partial \Omega}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial \alpha_n}\right) \\ &= \sum_i \left(\frac{d b_i}{dt}\frac{\partial a_i}{\partial \alpha_n} - \frac{d a_i}{dt}\frac{\partial b_i}{\partial \alpha_n}\right) \\ &= \sum_{i,k} \left(\frac{\partial b_i}{\partial \alpha_k}\frac{\partial a_i}{\partial \alpha_n} - \frac{\partial a_i}{\partial \alpha_k}\frac{\partial b_i}{\partial \alpha_n}\right)\frac{d\alpha_k}{dt}.\end{aligned}$$

In diesen Summen sind dem i die Werte $1, 2, \ldots, m$, dem k die Werte $1, 2, \ldots, 2m$ beizulegen. Nach (7) im vorigen Paragraphen wird also:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial \alpha_n} = \sum_k (\alpha_n, \alpha_k)\dfrac{d\alpha_k}{dt} \\ \qquad = (\alpha_n, \alpha_1)\dfrac{d\alpha_1}{dt} + (\alpha_n, \alpha_2)\dfrac{d\alpha_2}{dt} + \cdots + (\alpha_n, \alpha_{2m})\dfrac{d\alpha_{2m}}{dt}. \end{cases}$$

Man sehe zweitens $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}$ als Funktionen von $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m$ an. Dann hat man nach § 52:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_n}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial \alpha_n}{\partial a_i}\frac{d a_i}{dt} + \frac{\partial \alpha_n}{\partial b_i}\frac{d b_i}{dt}\right) \\ &= \sum_i \left(-\frac{\partial \alpha_n}{\partial a_i}\frac{\partial \Omega}{\partial b_i} + \frac{\partial \alpha_n}{\partial b_i}\frac{\partial \Omega}{\partial a_i}\right) \\ &= \sum_{i,k} \left(-\frac{\partial \alpha_n}{\partial a_i}\frac{\partial \alpha_k}{\partial b_i} + \frac{\partial \alpha_n}{\partial b_i}\frac{\partial \alpha_k}{\partial a_i}\right)\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_k}.\end{aligned}$$

In diesen Summen sind dem i wieder die Werte $1, 2, \ldots, m$, dem k die Werte $1, 2, \ldots, 2m$ beizulegen. Nach (5) im vorigen Paragraphen ergibt sich also, wenn man α_n, α_k an Stelle von φ, ψ schreibt:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_n}{dt} = \sum_k [\alpha_n, \alpha_k]\dfrac{\partial \Omega}{\partial \alpha_k} \\ \qquad = [\alpha_n, \alpha_1]\dfrac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} + [\alpha_n, \alpha_2]\dfrac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} + \cdots + [\alpha_n, \alpha_{2m}]\dfrac{\partial \Omega}{\partial \alpha_{2m}}. \end{cases}$$

Die Formeln (1) sind von *Lagrange*, die Formeln (2) von *Poisson* angegeben worden. Die einen lassen sich aus den andern mit Hilfe des folgenden Theorems ableiten:

Theorem.

$q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ seien beliebige voneinander unabhängige Funktionen der Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}$, so daß umgekehrt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}$ als unabhängige Funktionen der Größen $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ betrachtet werden können. Man setze bei der ersten Annahme

$$\begin{aligned}(\alpha_i, \alpha_k) = &\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_i} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_m}{\partial \alpha_i}\\ &- \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_k} - \cdots - \frac{\partial q_m}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p_m}{\partial \alpha_k},\end{aligned}$$

bei der zweiten Annahme

$$\begin{aligned}[\alpha_i, \alpha_k] = &\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_1}\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_1} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_2}\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_m}\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_m}\\ &- \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_1}\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_1} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_2}\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_m}\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_m}.\end{aligned}$$

Werden nach Festsetzung dieser Bezeichnungen die folgenden $2m$ linearen Gleichungen vorgelegt

$$\begin{array}{llllll} v_1 &= \quad * &+(\alpha_1, \alpha_2)u_2 &+(\alpha_1, \alpha_3)u_3 &+\cdots &+(\alpha_1, \alpha_{2m})u_{2m},\\ v_2 &=(\alpha_2, \alpha_1)u_1 &+ \quad * &+(\alpha_2, \alpha_3)u_3 &+\cdots &+(\alpha_2, \alpha_{2m})u_{2m},\\ v_3 &=(\alpha_3, \alpha_1)u_1 &+(\alpha_3, \alpha_2)u_2 &+ \quad * &+\cdots &+(\alpha_3, \alpha_{2m})u_{2m},\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{2m} &=(\alpha_{2m}, \alpha_1)u_1 &+(\alpha_{2m}, \alpha_2)u_2 &+(\alpha_{2m}, \alpha_3)u_3 &+\cdots &+ \quad * \quad, \end{array}$$

so gewinnt man durch Aufllösung dieser Gleichungen die folgenden Werte für $u_1, u_2, \ldots, u_{2m}$:

$$\begin{array}{llllll} u_1 &= \quad * &+[\alpha_1, \alpha_2]v_2 &+[\alpha_1, \alpha_3]v_3 &+\cdots &+[\alpha_1, \alpha_{2m}]v_{2m},\\ u_2 &=[\alpha_2, \alpha_1]v_1 &+ \quad * &+[\alpha_2, \alpha_3]v_3 &+\cdots &+[\alpha_2, \alpha_{2m}]v_{2m},\\ u_3 &=[\alpha_3, \alpha_1]v_1 &+[\alpha_3, \alpha_2]v_2 &+ \quad * &+\cdots &+[\alpha_3, \alpha_{2m}]v_{2m},\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{2m} &=[\alpha_{2m}, \alpha_1]v_1 &+[\alpha_{2m}, \alpha_2]v_2 &+[\alpha_{2m}, \alpha_3]v_3 &+\cdots &+ \quad * \quad, \end{array}$$

und umgekehrt erhält man durch Auflösung dieser Gleichungen jene.

Beweis:

Wir wollen die vorgelegten Gleichungen mit

$$[\alpha_i, \alpha_1], \quad [\alpha_i, \alpha_2], \ldots, [\alpha_i, \alpha_{2m}]$$

multiplizieren und die Produkte summieren. Dann ergibt sich ein Ausdruck folgender Art:

$$\begin{aligned}[\alpha_i, \alpha_1]v_1 + [\alpha_i, \alpha_2]v_2 + \cdots + [\alpha_i, \alpha_{2m}]v_{2m} \\ = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots + A_{2m} u_{2m},\end{aligned}$$

in dem

$$\begin{aligned}A_k &= [\alpha_i, \alpha_1](\alpha_1, \alpha_k) + [\alpha_i, \alpha_2](\alpha_2, \alpha_k) + \cdots + [\alpha_i, \alpha_{2m}](\alpha_{2m}, \alpha_k) \\ &= \sum_n [\alpha_i, \alpha_n](\alpha_n, \alpha_k) \\ &= \sum_n \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial q_1}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial p_1} + \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial q_2}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial p_2} + \cdots + \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial q_m}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial p_m} \\ -\dfrac{\partial \alpha_i}{\partial p_1}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial q_1} - \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial p_2}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial q_2} - \cdots - \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial p_m}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial q_m} \end{array} \right\} \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial q_1}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_n} + \dfrac{\partial q_2}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha_n} + \cdots + \dfrac{\partial q_m}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial p_m}{\partial \alpha_n} \\ -\dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial q_1}{\partial \alpha_n} - \dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial q_2}{\partial \alpha_n} - \cdots - \dfrac{\partial p_m}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial q_m}{\partial \alpha_n} \end{array} \right\} \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

In dieser Summe sind dem n die Werte $1, 2, \ldots, 2m$ beizulegen. Denselben Ausdruck kann man nach Ausführung der Multiplikation so darstellen:

$$\begin{aligned}A_k = &\sum_{i',k'} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_{i'}} \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_k} \cdot \sum_n \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_{i'}} \right) \\ &+ \sum_{i',k'} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial p_{i'}} \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_k} \cdot \sum_n \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_{i'}} \right) \\ &- \sum_{i',k'} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_{i'}} \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_k} \cdot \sum_n \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial p_{i'}} \right) \\ &- \sum_{i',k'} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial p_{i'}} \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_k} \cdot \sum_n \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial q_{i'}} \right).\end{aligned}$$

In diesen Summen sind dem n die Werte $1, 2, \ldots, 2m$ und i', k' die Werte $1, 2, \ldots, m$ beizulegen. Nun hat man aber:

$$\sum_n \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial p_{k'}}{\partial p_{i'}},$$
$$\sum_n \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial q_{k'}}{\partial q_{i'}},$$
$$\sum_n \frac{\partial q_{k'}}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial p_{i'}} = \frac{\partial q_{k'}}{\partial p_{i'}},$$
$$\sum_n \frac{\partial p_{k'}}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_{i'}} = \frac{\partial p_{k'}}{\partial q_{i'}}.$$

Der dritte und vierte dieser Ausdrücke verschwinden immer, der erste und zweite verschwinden, wenn i' und k' voneinander verschieden sind, und werden gleich der Einheit, wenn $i' = k'$ wird. Mithin wird:

$$A_k = \sum_{i'}\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_{i'}}\frac{\partial q_{i'}}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_{i'}}\frac{\partial p_{i'}}{\partial \alpha_k}\right) = \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_k}.$$

Da dieser Ausdruck verschwindet, außer wenn $i = k$ ist, und in diesem Falle in die Einheit übergeht, so sehen wir, daß auf der rechten Seite der Gleichung

$$[\alpha_i, \alpha_1]v_1 + [\alpha_i, \alpha_2]v_2 + \cdots + [\alpha_i, \alpha_{2m}]v_{2m}$$
$$= A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots + A_{2m} u_{2m}$$

die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, A_{2m}$ außer A_i alle verschwinden, daß aber $A_i = 1$ wird. Also wird die obige Gleichung folgende:

$$[\alpha_i, \alpha_1]v_1 + [\alpha_i, \alpha_2]v_2 + \cdots + [\alpha_i, \alpha_{2m}]v_{2m} = u_i.$$

Erteilt man dem i nacheinander die Werte $1, 2, \ldots, 2m$, so gewinnt man die in dem ausgesprochenen Theorem angegebenen Werte der $u_1, u_2, \ldots, u_{2m}$.

In ganz ähnlicher Weise kann umgekehrt aus dem zweiten im obigen Theorem angegebenen Gleichungssystem das erste abgeleitet werden.



Anmerkungen.

Die »nova methodus« wurde aus dem Nachlaß *Jacobis* *) († 1851) von *Clebsch* herausgegeben (Crelles Journal, Bd. 60), der das Manuskript im wesentlichen unverändert wiedergeben konnte und nur an einer Stelle (vgl. die Fußnote auf S. 131) eine Lücke auszufüllen brauchte. *Jacobi* hat seine Abhandlung im Jahre 1838 geschrieben. Seine Resultate waren, als *Clebsch* sie 1862 veröffentlichte, fast sämtlich schon von andern Mathematikern gefunden und bekannt gemacht (*Liouville*, *Bour*, *Donkin*).

Die »nova methodus« nennt man auch die zweite *Jacobi*sche Methode im Gegensatz zu seiner ersten, die er 1837 veröffentlichte, die aber im Grunde mit der *Cauchy*schen Methode identisch ist.

Nach der ersten *Jacobi*schen Methode muß man eine gewisse lineare partielle Differentialgleichung vollständig integrieren, um dadurch die charakteristischen Streifen zu finden, aus denen sich die Integralgebilde aufbauen lassen.

Nach der »nova methodus« geht die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$H(q_1, q_2, \dots, q_m, p_1, p_2, \dots, p_m) = a$$

so vor sich:

Man sucht zunächst eine (von H unabhängige) Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung

$$1) \qquad (Hf) = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = 0$$

*) Über das Leben *Jacobis* ist in einem andern Bändchen dieser Sammlung berichtet worden.

auf. Sie heiße H_1. Dann ermittelt man eine (von H und H_1 unabhängige) Lösung H_2 des Systems

$$2)\qquad (Hf) = 0\,, \quad (H_1 f) = 0\,,$$

darauf eine (von H, H_1, H_2 unabhängige) Lösung H_3 des Systems

$$3)\qquad (Hf) = 0\,, \quad (H_1 f) = 0\,, \quad (H_2 f) = 0$$

usw. Schließlich ist eine (von H, H_1, $\ldots$, H_{m-2} unabhängige) Lösung H_{m-1} des Systems

$$m-1)\quad (Hf) = 0\,, \quad (H_1 f) = 0\,, \ \ldots, \ (H_{m-2} f) = 0$$

herzustellen.

Diese Systeme sind, wie sich mit Hilfe der *Jacobi*schen Identität

$$((\varphi\,\psi)\chi) + ((\psi\chi)\,\varphi) + ((\chi\,\varphi)\,\psi) = 0$$

ergibt, vollständige Systeme. Man muß also für die vollständigen Systeme 1), 2), $\ldots$, $m-1$) je eine Lösung bestimmen, die von den bereits gefundenen unabhängig ist.

Nachdem H_1, H_2, $\ldots$, H_{m-1} in der angegebenen Weise gewonnen sind, läßt sich eine Funktion

$$F(z,\ q_1,\ \ldots,\ q_m,\ p_1,\ \ldots,\ p_m)$$

finden derart, daß die Gleichungen

$$H = a\,, \quad H_1 = a_1\,, \ \ldots, \ H_{m-1} = a_{m-1}\,, \quad F = c$$

einen Verein von ∞^m Elementen 1. Ordnung darstellen, der dann eine vollständige Lösung von $H = a$ ist (mit den willkürlichen Konstanten c, a_1, a_2, $\ldots$, a_{m-1}).

Um F zu erhalten, hat man eine von H, H_1, $\ldots$, H_{m-1} unabhängige Lösung des vollständigen Systems

$$(Hf) + \frac{\partial f}{\partial z}\sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0\,,$$

$$(H_1 f) + \frac{\partial f}{\partial z}\sum p_i \frac{\partial H_1}{\partial p_i} = 0\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(H_{m-1} f) + \frac{\partial f}{\partial z}\sum p_i \frac{\partial H_{m-1}}{\partial p_i} = 0$$

zu bestimmen.

Nach *A. Mayer* erfordert die Ermittelung von H_i eine Operation*) von der Ordnung $2m - 2i$, während die Bestimmung von F eine Quadratur verlangt.

Zur Integration der Differentialgleichung $H = a$ sind also nach der »nova methodus« (wenn man noch die Resultate von *A. Mayer* benutzt) folgende Operationen nötig, die nacheinander ausgeführt werden müssen:

eine Operation von der Ordnung $2m - 2$,
eine » » » » $2m - 4$,
. . . .
eine » » » » 4,
eine » » » » 2,
eine Quadratur.**)

In speziellen Fällen kann sich die Zahl der Operationen noch vermindern. Auch ist es oft zweckmäßig, eine Kombination der beiden *Jacobi*schen Methoden zu benutzen. Wie man dabei zu verfahren hat, zeigt *Lie*s Methode.

---

1) *Zu S. 4.* *Jacobi* hat an einer andern Stelle eine zweite Methode zur Herausschaffung der abhängigen Veränderlichen angegeben. Man denkt sich dabei V durch eine Gleichung

$$F(V, q_1, q_2, \cdots, q_m) = c$$

definiert und aus ihr die Ableitungen von V berechnet, die man in die gegebene Differentialgleichung

$$\varphi(q_1, \cdots, q_m, V, p_1, \cdots, p_m) = 0$$

einsetzt. Dadurch entsteht die neue Differentialgleichung

$$\varphi\left(q_1, \cdots, q_m, V, -\frac{\frac{\partial F}{\partial q_1}}{\frac{\partial F}{\partial V}}, \cdots, -\frac{\frac{\partial F}{\partial q_m}}{\frac{\partial F}{\partial V}}\right) = 0,$$

in der die abhängige Veränderliche F fehlt.

---

*) Eine Operation von der Ordnung $(n-1)$ ist die Bestimmung einer Lösung einer Gleichung $\sum a_i(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$.

**) Bei *Jacobi* selbst ist die Zahl der geforderten Operationen größer (vgl. S. 40).

2) *Zu S. 4.* Diese Auffassung des Integrationsproblems geht bis auf *Euler* zurück. Sie liegt auch den Methoden von *Lagrange* und *Pfaff* zugrunde. Bei *Jacobi* ist die Formulierung dadurch vereinfacht, daß die abhängige Veränderliche in der Gleichung nicht vorkommt.

3) *Zu S. 12.* Lineare partielle Differentialgleichungen zu integrieren, hat schon *Lagrange* gelehrt (vgl. z. B. seine Leçons sur la théorie des fonctions, leç. 20).

4) *Zu S. 16.* Es handelt sich bei dieser simultanen Integration um »vollständige Systeme«. Eine Integrationstheorie für solche Systeme hat zuerst *Jacobi* entwickelt (in §§ 19 und 20 der »nova methodus«). Auf die einfachste Gestalt ist die Theorie der vollständigen Systeme durch *A. Mayer* gebracht worden (vgl. Math. Annalen, Bd. 5, S. 448—470).

5) *Zu S. 17.* Man hat nicht mit Unrecht *Jacobi* den Vorwurf gemacht, daß er in seiner »nova methodus« nicht scharf genug zwischen Identitäten und Gleichungen, die nur auf Grund anderer bestehen, unterscheidet (vgl. *Gilbert*: Sur une propriété de la fonction de *Poisson* et sur la méthode de *Jacobi* etc. Annales de la soc. scient. de Bruxelles, 1881). So wird z. B. die in Theorem II angegebene Relation

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_i}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial p_i}{\partial q_\lambda}\frac{\partial p_k}{\partial p_\lambda} + \cdots$$

später (§ 17, Schluß) benutzt, als wäre sie eine Identität in den q und $p_\lambda, p_\mu, \ldots$, während dies aus dem Beweis in § 13 nicht hervorgeht. Zu Theorem I läßt sich ähnliches bemerken. Die Gleichungen (a) werden dort als Identitäten bezeichnet und sollen notwendig und hinreichend dafür sein, daß $\sum p_i\, dq_i$ ein vollständiges Differential wird. Setzt man aber z. B.

$$p_1 = p_2 \cdot \frac{q_2}{q_1}, \qquad p_2 = q_1,$$

so wird

$$p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 = d(q_1 \cdot q_2),$$

also ein vollständiges Differential. Trotzdem ist die hier das System (a) vertretende Gleichung

$$\frac{\partial p_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_2} + \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \frac{\partial p_2}{\partial q_1},$$

d. h.

$$\frac{p_2}{q_1} = 1$$

keine Identität, sondern eine Folge von $p_2 = q_1$.

6) *Zu S. 23.* Den Ausdruck

$$\sum \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_j} \frac{\partial H_{i'}}{\partial q_j} - \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \frac{\partial H_{i'}}{\partial p_j} \right)$$

pflegt man jetzt durch das Klammersymbol

$$(H_i H_{i'})$$

darzustellen. *Jacobi* schreibt dafür (siehe § 26)

$$-[H_i H_{i'}].$$

In der vorliegenden Übersetzung ist die *Jacobi*sche Bezeichnungsweise beibehalten, die man auch in der neueren Literatur manchmal noch antrifft.

7) *Zu S. 28.* Der Beweis dieses Theorems steht in § 29. Er beruht auf der *Jacobi*schen Identität (§ 26), die für drei beliebige Funktionen φ, ψ, χ der q_i, p_i gilt:

$$((\varphi \psi) \chi) + ((\psi \chi) \varphi) + ((\chi \varphi) \psi) = 0.$$

8) *Zu S. 41.* Die Entwickelungen in §§ 23—25 könnten auch in einer Abhandlung von *Lie* stehen. Bei *Jacobi* fehlt nur die begriffliche Deutung, die *Lie* den Formeln gibt.

9) *Zu S. 48.* Wenn f und φ Funktionen von z, $q_1, \ldots, q_m$, $p_1, \ldots, p_m$ sind, so stellt man gewöhnlich

$$\sum_i \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right\}$$

durch $[\varphi f]$ dar. Sind φ und f frei von z, so wird dieser Ausdruck gleich dem *Jacobi*schen $[f \varphi]$.

Theorem V ist der Fundamentalsatz der ganzen *Jacobi*schen Theorie.

10) *Zu S. 50.* Diesen Satz nennt man jetzt das *Poisson*sche Theorem. Historisches über dieses direkt aus der *Jacobi*schen Identität folgende Theorem bringt *Jacobi* in § 28. Siehe auch § 72 (S. 210). In seinen »Vorlesungen über Dynamik« (herausgeg. v. *Clebsch*, 1866), die *Jacobi* 1842—43 gehalten hat, äußert er sich (in Vorl. 34) ebenfalls über die Geschichte des Theorems.

11) *Zu S. 52* Es handelt sich um *Poissons* berühmte Arbeit: »Sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique« (Journal de l'école polyt., cahier 15). Über die *Lagrange*schen und *Poisson*schen Störungsformeln und die Ableitung der einen aus den andern siehe § 73.

12) *Zu S. 53.* Die Bemerkung *Jacobis* anläßlich der Tatsache, daß sowohl *Poisson* als auch *Lagrange* die wahre Bedeutung des *Poisson*schen Resultates nicht richtig erkannt hat, lautet im Urtext: Habemus hic praeclarum exemplum, nisi animo praeformata sint problemata, fieri posse, ut vel ante oculos posita gravissima inventa non videamus.

13) *Zu S. 54.* *Jacobi* hat sich nicht getäuscht. Das beweisen die Theorien von *Lie* und die daran anknüpfenden Arbeiten über Dynamik aus neuerer Zeit.

14) *Zu S. 64.* Fügt man zu den Differentialgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

noch die Gleichung

$$\frac{dz}{dt} = \sum p_i \frac{\partial f}{\partial p_i},$$

so erhält man das System, welches bei *Cauchy* und *Lie* die charakteristischen Streifen der Differentialgleichung

$$f(q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m) = a$$

definiert. § 33 zeigt, wie man aus der vollständigen Lösung V von $f = a$ ohne Integration die charakteristischen Streifen erhält.

15) *Zu S. 65.* Dieser schöne Ausspruch *Jacobis* sei hier im Urtext angegeben: Summum enim videtur quum in omni scientia tum in analysi mathematica nexus novus patefactus inter ea, quae nullo vinculo videbantur coniuncta.

16) *Zu S. 68.* Solche Relationen treten in *Lies* Theorie der Berührungstransformationen auf und finden dort ihre begriffliche Deutung.

17) *Zu S. 73.* *Hamilton*: On a general method in Dynamics. London Philos. Transactions 1834 und 1835. Diese Abhandlungen hängen aufs engste mit den *Jacobi*schen Theorien zusammen. *Jacobi* hat die *Hamilton*schen Arbeiten, wie es scheint, genau studiert. Später sind viele von den Entdeckungen

des großen irischen Forschers, der unter anderem eigentümliche Beziehungen zwischen Optik und Dynamik erkannt hatte, in Vergessenheit geraten. (Vgl. den Aufsatz von *Study* im Jahresber. der deutschen Math.-Vereinigung, 1905.)

18) und 19) *Zu S. 73* u. *75.* Die erste Auflage von *Lagranges* »Mécanique analytique« erschien 1788 (in Paris). Eine deutsche Übersetzung gab *Servus* 1887 heraus. In Betracht kommt hier das 2. und das 4. Kapitel des 2. Abschnitts.

20) *Zu S. 82.* Die umständlichen Untersuchungen in § 39ff. sind in verschiedenen Punkten nicht ganz zu Ende geführt. Auch sind die angestellten Schlüsse nicht immer streng.

21) *Zu S. 117.* Eigentlich folgt nur (wie auch an andern Stellen), daß das Resultat vermöge $F = 0$, $\Phi = 0, \ldots$ verschwinden muß.

22) *Zu S. 122.* Die Überschrift dieses Paragraphen könnte lauten: Invarianteneigenschaft des Klammerausdrucks.

23) *Zu S. 124.* Das ist eine Verallgemeinerung des *Poisson*schen Theorems, die *Jacobi* im Hinblick auf die Mechanik vornehmen mußte.

24) *Zu S. 128.* Vgl. die in Anm. 17) zitierten *Hamilton*schen Arbeiten, sowie *Jacobis* »Vorlesungen über Dynamik« (Vorl. 36).

25) *Zu S. 133.* Vgl. die in Anm. 11) zitierte Arbeit von *Poisson.*

26) *Zu S. 135.* Über das Verhältnis des in Gleichung (3) enthaltenen Prinzips (the law of varying action) zu dem Prinzip der kleinsten Wirkung (the law of stationary action) spricht sich *Hamilton* a. a. O. aus. Für den Fall, daß U die Zeit nicht enthält, wird das über einen genügend kleinen Zeitraum erstreckte *Hamilton*sche Integral wirklich ein Minimum (*Darboux*).

27) *Zu S. 146.* Die *Euler*sche Transformation ist ein einfaches Beispiel einer Berührungstransformation. Solche Transformationen kommen auch in *Lagranges* Arbeit über partielle Differentialgleichungen aus dem Jahre 1772 vor. In der Geometrie traten schon viel früher Berührungstransformationen auf.

28) *Zu S. 148.* Der Beweis dieses und des nächsten Satzes wird in übersichtlicher Weise noch einmal geführt auf S. 150f. Über Transformationen, die ein kanonisches System wieder in ein solches verwandeln vgl. *Lies* wichtige Abhandlung: »Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen« (Archiv for Math. og Naturv. 1877).

29) *Zu S. 153.* Kanonische Elemente in dem hier erklärten Sinne finden sich schon in den Arbeiten *Lagranges* und *Poissons* über die Variation der Konstanten in den mechanischen Problemen.

30) *Zu S. 154.* Die gemeinte Methode besteht darin, eine der Konstanten, die in der vollständigen Lösung auftreten, gleich einer willkürlichen Funktion der übrigen zu setzen und dann einen Umhüllungsprozess vorzunehmen.

31) und 32) *Zu S. 159 u. 167.* Diese Transformationen sind sehr allgemeine Berührungstransformationen. Falls z. B. f_1, V, F, Φ, ... frei von t sind, so daß die zu dem kanonischen System gehörige partielle Differentialgleichung $f_1 = a$ lautet, ergibt sich aus den *Jacobi*schen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
z_1 &= z - V, \\
p_i &= \frac{\partial V}{\partial q_i} - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial q_i} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \cdots, \\
b_i &= -\frac{\partial V}{\partial a_i} + \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial a_i} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} + \cdots, \\
F &= 0, \quad \Phi = 0, \ldots \\
&\qquad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

die allgemeinste Berührungstransformation von der Form:

$$z_1 = z - V, \quad a_i = A_i(q, p), \quad b_i = B_i(q, p).$$

Diese Berührungstransformationen bilden eine wichtige unendliche Gruppe.

In gewissem Sinne ist also *Jacobis* Behauptung am Schluß von § 61 berechtigt. Systematisch hat freilich erst *Lie* diese Dinge behandelt (seit 1871). Niemand hat vor ihm auch nur den Begriff der Berührungstransformation klar formuliert, geschweige denn eine Theorie der Berührungstransformationen zu begründen gedacht.

33) *Zu S. 173.* Der § 63 versucht den Zusammenhang klarzulegen, der zwischen der ersten und der zweiten *Jacobi*schen Methode besteht. Es schwebt hier, wie es scheint, *Jacobi* eine Kombination der beiden Methoden vor. Eine solche hat später *Lie* erreicht.

34) *Zu S. 180.* Für den Fall der *Newton*schen Anziehung wird das erste der beiden Probleme in § 67 ausführlich behandelt unter Benutzung der in der Astronomie üblichen Konstanten. Die von *Jacobi* erwähnte Arbeit *Eulers* über das zweite

Problem steht in den Abhandlungen der Berliner Akademie von 1758; *Jacobi* selbst war der erste, der das *Euler*sche Problem mit Hilfe der elliptischen Funktionen vollständig erledigte (Crelles Journal, Bd. 39).

35) *Zu S. 182.* Dies ist ein Fall, wo sich wieder der in Anm. 15) zitierte Ausspruch *Jacobis* anwenden läßt.

36) *Zu S. 190.* *Lagrange* veröffentlichte seine Methode in den Abhandlungen der Berliner Akademie (1772). Eine deutsche Ausgabe dieser Arbeit (zusammen mit einer von *Cauchy*) ist in dieser Sammlung erschienen.

37) *Zu S. 191.* Kennt man von

$$y'' = a(x)y + b(x)y'$$

die Lösung z, so ist

$$zy' - yz' = e^{\int b dx}.$$

Man kommt also auf eine lineare Gleichung, die sich durch Quadraturen erledigen läßt.

38) *Zu S. 191.* Bei den Kegel- und Zylinderflächen liefern die Erzeugenden, bei den Rotationsflächen die Meridiane ein Integral.

39) *Zu S. 192.* Vgl. die in Anm. 17) zitierten Abhandlungen *Hamiltons*.

Bonn, November 1906.

G. Kowalewski.

Berichtigungen.

Es muß heißen:

Seite 17, Zeile 1: $\frac{\partial p_i}{\partial q_k}$ statt $\frac{\partial p_i}{\partial p_k}$,

» 24, » 2: $\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_{k'}}\right)$ » $\left(\frac{\partial p_k}{\partial p_{k'}}\right)$,

» 33, » 16: je $2(m-i)+1$ statt $2(m-1)+1$,

» 45, » 4 v. u.: so statt also,

» 51, » 17: können » bönnen,

» 52, » 3: vollkommen statt vollkommene,

» 166, » 4 v. u.: $\frac{\partial W}{\partial t}$ statt $\frac{\partial W}{\partial \tau}$,

» 180, » 6: doch statt jedoch,

» 191, » 2: Quadraturen statt einer Quadratur.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.



Nr. 82. **Jacob Steiner,** Systemat. Entwickl. der Abhängigkeit geometr. Gestalten voneinander, mit Berücksichtig. der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie d. Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität usw. (1832.) I. Theil. Herausgeg. von A. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Textfiguren. (126 S.) ℳ 2.—.

» 83. —— ——· II. Theil. Herausgeg. von A. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) ℳ 2.40.

» 90. **A. Bravais,** Abhandlung über die Systeme von regelmäßig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) ℳ 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet,** Untersuch. über verschiedene Anwendungen d. Infinitesimalanalysis auf d. Zahlentheorie. (1839—1840.) Deutsch herausgeg. von R. Haussner. (128 S.) ℳ 2.—.

» 93. **Leonhard Euler,** Drei Abhandlungen üb. Kartenprojection. (1777.) Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) ℳ 1.20.

» 99. **R. Clausius,** Über die bewegende Kraft d. Wärme. (1850.) Herausg. von Max Planck. Mit 4 Textfiguren. (55 S.) ℳ —.80.

» 101. **G. Kirchhoff,** Abhandlung über mechanische Wärmetheorie: 1. Ein Satz der mechan. Wärmetheorie u. Anwendung. (1858.) 2. Spannung d. Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind. (1858.) — 3. Spannungen d. Dampfes von Mischungen aus Wasser u. Schwefelsäure. Herausg. v. Max Planck. (48 S.) ℳ —.75.

» 102. **James Clerk Maxwell,** Über physikal. Kraftlinien. Herausgeg. von L. Boltzmann. Mit 12 Textfiguren. (147 S.) ℳ 2.40.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Eulers Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. v. Oettingen, herausgeg. von H. Weber. (171 S.) ℳ 2.60.

» 106. **D'Alembert,** Dynamik. (1743.) Übersetzt und herausgegeben von Arthur Korn. Mit 4 Tafeln. (210 S.) ℳ 3.60.

» 107. **Jakob Bernoulli,** Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Ars conjectandi.) (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgeg. von R. Haussner. Mit 1 Textfigur. (162 S.) ℳ 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Textfig. (172 S.) ℳ 2.70.

» 109. **Riccardo Felici,** Mathematische Theorie der electro-dynamischen Induction. Übersetzt von B. Dessau. Herausgeg. von E. Wiedemann. (121 S.) ℳ 1.80.

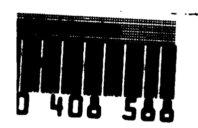
» 111. **N. H. Abel,** Abhandl. über eine besond. Klasse algebraisch. auflösb. Gleichungen. Herausg. von Alfred Loewy. (50 S.) ℳ —.90.

» 112. **Augustin-Louis Cauchy,** Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen. (1825.) Herausgeg. von P. Stäckel. (80 S.) ℳ 1.25.

» 113. **Lagrange** (1772) und **Cauchy** (1819), Zwei Abhandl. zur Theorie d. partiellen Differentialgleich. erster Ordnung. Aus d. Französ. übers. und herausgeg. von Gerhard Kowalewski. (54 S.) ℳ 1.—.

» 116. **Lejeune Dirichlet,** Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen (1837) u. **Philipp Ludwig Seidel,** Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuierl. Functionen darstellen (1847). Herausgegeben v. Heinrich Siebmann. (58 S.) ℳ 1.—.

» 117. **Gaspard Monge,** Darstellende Geometrie. (1798.) Übersetzt und herausg. von Robert Haussner. Mit zahlreichen Figuren im Texte und in den Anmerkungen. (217 S.) ℳ 4.—.



DATE DUE			

